

# A EVOLUÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DO TAMANHO DAS CIDADES DE MINAS GERAIS: 1920 – 2000

Rubens Augusto de Miranda  
(CEDEPLAR-UFMG)

Bruno Dutra Badia  
(CEDEPLAR-UFMG)

**Resumo:** O objetivo do presente trabalho é apresentar a evolução da distribuição do tamanho das cidades do estado de Minas Gerais entre os anos de 1920 e 2000 através da abordagem teórica da chamada lei de Zipf. A partir disto, pretende-se identificar se houve um processo concentrador, favorecendo as maiores cidades ou o seu oposto, que como resultado apresentaria uma tendência a uma distribuição mais igualitária do tamanho das cidades.

**Palavras-chave:** Tamanho das cidades, Lei de Zipf, Minas Gerais.

**Abstract:** The present paper presents the evolution of the size distribution of Minas Gerais cities in the period from 1920 to 2000 through theoretical approach of Zipf's law. It is intended to identify there was an agglomeration process, favoring the biggest cities or its opposite, that would result in a more equally distribution of city sizes.

**Key words:** Size of Cities, Zipf's Law, Minas Gerais.

# A EVOLUÇÃO DA DISTRIBUIÇÃO DO TAMANHO DAS CIDADES DE MINAS GERAIS: 1920 – 2000

**Resumo:** O objetivo do presente trabalho é apresentar a evolução da distribuição do tamanho das cidades do estado de Minas Gerais entre os anos de 1920 e 2000 através da abordagem teórica da chamada lei de Zipf. A partir disto, pretende-se identificar se houve um processo concentrador, favorecendo as maiores cidades ou o seu oposto, que como resultado apresentaria uma tendência a uma distribuição mais igualitária do tamanho das cidades.

**Palavras-chave:** Tamanho das cidades, Lei de Zipf, Minas Gerais.

**Abstract:** The present paper presents the evolution of the size distribution of Minas Gerais cities in the period from 1920 to 2000 through theoretical approach of Zipf's law. It is intended to identify there was an agglomeration process, favoring the biggest cities or its opposite, that would result in a more equally distribution of city sizes.

**Key words:** Size of Cities, Zipf's Law, Minas Gerais.

## 1. INTRODUÇÃO

A busca de regularidades estatísticas no que tange a distribuição das cidades tem atraído cientistas, familiarizados com as sutilezas matemáticas, dos mais diversos campos do conhecimento, incluindo, principalmente, biólogos, sociólogos, geógrafos, físicos, matemáticos e economistas. Podemos tomar como ponto de partida o estudo de Auerbach, geógrafo alemão, que em 1913 descreveu uma regularidade empírica muito interessante. Ao analisar a distribuição do tamanho das cidades, ele achou que o produto do tamanho da população e seu correspondente *rank*<sup>1</sup> na distribuição aparece aproximadamente constante para um dado território. Portanto, a segunda maior cidade teria em média a metade da população da maior cidade, a terceira maior cidade teria um terço da população da maior cidade, e a *m*-ésima cidade pertencente ao *ranking* teria  $1/m$  da população da maior cidade. Como não é nenhum pouco óbvio o porquê deste padrão na hierarquia das cidades, esta regra de *rank-size*, também conhecida como lei de Zipf para as cidades após o trabalho de George Zipf (1949), ainda continua intrigando muitos pesquisadores.

O objetivo do presente trabalho é apresentar a evolução da distribuição do tamanho das cidades do estado de Minas Gerais entre os anos de 1920 e 2000. A partir disto, pretende-se identificar se houve um processo concentrador, favorecendo as maiores cidades ou o seu oposto, isto é uma desconcentração, que como resultado apresentaria uma tendência a uma distribuição mais igualitária do tamanho das cidades. Por fim, buscam-se evidências de que se no limite a distribuição de tamanho das cidades de Minas Gerais obedece ou não a chamada lei de Zipf.

## 2. A REGRA DE RANK-SIZE DAS CIDADES

Para tentar entender a lei de Zipf, Beckman (1958) apresenta um simples modelo de hierarquia de cidades no qual assume que há uma camada de assentamentos de populações rurais com densidade

---

<sup>1</sup> O ordenamento segue por ordem de tamanho populacional. A cidade de maior população é a primeira do *ranking*, a segunda maior população a segunda do *ranking* e assim por diante.

uniforme. A primeira camada de cidades consistiria de centros desempenhando as mais elementares funções de produção e distribuição. A área de mercado seria limitada pela maior distância tolerável pela população rural servida. Para quantificar isso e a ordem das cidades, toma-se a seguinte hipótese: O tamanho de cada cidade é proporcional à população a qual serve (incluindo sua própria população, evidentemente). Então se  $n_r$  é a população rural da área de mercado das cidades da primeira camada, e  $n_c$  o tamanho da cidade, temos

$$n_c = \gamma(n_r + n_c) \tag{1}$$

$$n_c = \frac{\gamma n_r}{1 - \gamma}$$

onde  $\gamma > 0$  é um fator de proporcionalidade.

Beckmann chamou  $\frac{\gamma}{1 - \gamma}$  de “multiplicador urbano” efetivo.

O autor faz a indagação de qual corpo populacional viria a gerar a próxima ordem de cidades. Supõe-se que as cidades de cada ordem têm um número fixo de cidades satélites pertencentes à ordem inferior seguinte, que chamaremos de  $s$ . Tomando  $n_m$  como o tamanho das cidades de ordem  $m$  e  $\bar{n}_m$  a população total servida por estas cidades, pode-se derivar o tamanho das cidades de  $m$ -ésima ordem. De (1) decorre:

$$n_m = \gamma \bar{n}_m \tag{2}$$

Além disso, a suposição a respeito das cidades satélites, implica:

$$\bar{n}_m = n_m + s \bar{n}_{m-1} \tag{3}$$

Substituindo (2) em (3) obtém-se, após alguns passos:

$$\bar{n}_m = \frac{s^{m-1} n_r}{(1 - \gamma)^m} \tag{4}$$

$$n_m = \frac{\gamma s^{m-1} n_r}{(1 - \gamma)^m}$$

De (4) temos que tanto o tamanho da cidade, como a população servida por ela, aumentam exponencialmente com o nível da cidade na hierarquia.

Quando  $m$  assume seu maior valor,  $N$ , (4) descreve a relação entre a população total  $n_r$ , o tamanho da menor comunidade  $n_r$ , e o número de *ranks* na hierarquia das cidades,  $N$ :

$$n_r = \frac{s^{N-1} n_r}{(1 - \gamma)^N} \tag{5}$$

Pode-se obter outra relação. Sendo  $C$  o número total de cidades, este é igual a:

$$C = 1 + s + s^2 + \dots + s^N = \frac{s^{N+1} - 1}{s - 1} \quad (6)$$

A equação acima nos diz que, as cidades, quando ordenadas por tamanho, apresentam aproximadamente o seguinte padrão. Há uma maior cidade, há  $s$  cidades na classe seguinte de tamanho,  $s^2$  cidades na terceira classe de tamanho, e assim por diante. A primeira cidade de  $m$ -ésimo tamanho tem  $rank \frac{s^m - 1}{s - 1} + 1$ . Uma cidade mediana possui  $rank \frac{s^m - 1}{s - 1} + \frac{s^m}{2} \approx s^m \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{s - 1} \right)$  e tamanho  $n_{N-m} = \frac{m_r}{s} \left( \frac{s}{1 - \gamma} \right)^{N-m}$ .

Desta forma, o produto entre o rank e o tamanho da cidade, é dado por:

$$\frac{m_r}{s} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{s - 1} \right) \left( \frac{s}{1 - \gamma} \right)^N (1 - \gamma)^m = \kappa (1 - \gamma)^m \quad (7)$$

onde  $\kappa \equiv \frac{m_r}{s} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{s - 1} \right) \left( \frac{s}{1 - \gamma} \right)^N$  é uma constante.

Como não é factível concluir que todas as cidades de uma mesma hierarquia possuem o mesmo tamanho, devemos entender esse resultado apenas como uma aproximação. Seria mais sensato assumir que fatores que aumentam o tamanho da cidade de um a outro nível sejam variáveis aleatórias. Após um bom número de multiplicações, o produto vai apresentar uma distribuição padrão. Como resultado, o diagrama de *rank-size* vai sendo suavizado e a distinção de classes é perdida.

Se considerarmos  $\gamma > 0$  e pequeno,

$$(1 - \gamma)^{-m} = \frac{1}{(1 - \gamma)^m} \approx 1 + \gamma m$$

Com isso conclui-se que o produto entre o rank e o tamanho das cidades é aproximadamente constante. Esse é o argumento da então chamada regra de *rank-size* para cidades. Esta regra diz simplesmente que o tamanho da  $m$ -ésima cidade é aproximadamente  $1/m$  o tamanho da maior cidade.

Podemos considerar a distribuição dos tamanhos em termos de  $N(n)$ , que é o número (*rank*) da cidade, cujos tamanhos são maiores ou iguais a  $n$ . Sob a regra de *rank-size* há  $m$  cidades maiores ou iguais a  $\frac{A}{n}$ , onde  $A$ , se refere ao tamanho da maior cidade.

Note que  $(A/n)$  é uma distribuição de Pareto com coeficiente igual a um. Considerando o tamanho da  $i$ -ésima cidade,  $n_i$ , como uma variável aleatória, a probabilidade desta população ser menor ou igual a um dado tamanho  $n^*$  será dada por:

$$\Pr(n_i \leq n^*) = 1 - \frac{A}{(n^*)^\zeta} \quad (8)$$

Obviamente, a probabilidade de encontrarmos uma cidade maior do que  $n^*$  é dada por

$$\Pr(n_i > n^*) = 1 - \Pr(n_i \leq n^*) = \frac{A}{(n^*)^\zeta} \quad (9)$$

Desta forma o rank da  $i$ -ésima cidade na distribuição será dado por:

$$N(n_i) = \frac{A}{(n^*)^\zeta} \quad (10)$$

A equação (11) apenas nos diz que a distribuição de tamanho das cidades condizente com a Lei de Zipf é um caso particular de uma distribuição de Pareto onde o coeficiente no denominador iguala-se à unidade, como observado acima.

Na próxima seção apresentaremos o modelo econométrico geralmente adotado para a verificação da teoria acima exposta. Além disso, apresenta-se um desdobramento deste modelo que objetiva captar não-linearidades na distribuição do tamanho das cidades, bem como uma breve discussão da literatura recente sobre o assunto.

### 3. O MODELO

Para testar a lei de Zipf, estima-se a seguinte equação:

$$\ln N(n_i) = \ln A - \zeta \ln n_i + \varepsilon_i \quad (11)$$

onde o subscrito  $i$  refere-se a  $i$ -ésima cidade. Assume-se  $\varepsilon_i$  como tendo distribuição normal com média zero e variância constante.

Obviamente, existe a possibilidade de ocorrência de três casos com a estimação de (11). Um é a confirmação da Lei de Zipf, ou seja,  $\zeta = 1$ . Outro é que o valor do parâmetro estimado seja maior do que a unidade,  $\zeta > 1$ . Neste caso, diz-se que a hierarquia urbana distribui-se de forma mais igualitária, ou seja, as menores cidades estão, em tamanho, mais próximas das maiores cidades. Por fim, o caso em que  $\zeta < 1$ , temos uma distribuição na qual a população encontra-se concentrada em poucas cidades, isto é, naquelas que ocupam as primeiras colocações do rank. Richardson (1973, p. 141) ainda observa que “*the limiting cases, unknown in practice, are  $\zeta = \infty$  (only one city) and  $\zeta = 0$  (all cities of the same size)*”.

Os trabalhos empíricos verificaram diferentes estimativas para o coeficiente  $\zeta$ . Ainda que certa regularidade seja verificada, os estudos apontam para uma forte sensibilidade das estimativas com relação a variações na amostra e ao método de estimação empregado. Rosen e Resnick (1980) a partir de uma amostra contendo 44 países e suas 50 maiores cidades no ano de 1970 rejeitam a hipótese de que a distribuição de tamanho das cidades obedecem à lei de Zipf para grande parte dos países componentes de sua amostra. Gabaix (1999a), encontra uma estimativa  $\zeta = 1,005$ , aceitando tal hipótese. Sua amostra refere-se às 135 áreas metropolitanas dos Estados Unidos presentes no *Statistical Abstract of the United States* de 1991. Ruiz (2005) estima um parâmetro de Pareto igual a 0,889 e 1,039 para as 100 maiores aglomerações urbanas do Brasil e dos Estados Unidos, respectivamente, para o ano de 2000, sendo que o parâmetro estimado confirma a lei de Zipf para o Brasil quando considerada 80% população urbana compondo a amostra.

Gabaix (1999a), mostra que se as cidades crescem, em tamanho, aleatoriamente obedecendo a lei de Gibrat<sup>2</sup>, então a lei de Zipf constitui a distribuição limite das cidades. O autor, assim como Ioannides & Overman (2003), preocupado com uma possível variação nos potenciais de crescimento das cidades, dada a observação de que as mesmas crescem a taxas distintas, o que poderia invalidar a lei de Gibrat, examina o caso onde cidades crescem randomicamente, mas que cujas taxas de crescimento e desvios padrão são dependentes de seus respectivos tamanhos. Neste caso se entende o processo de crescimento das cidades como o de um movimento browniano geométrico variante no tempo e sua distribuição limite convergiria a uma lei de potências com um expoente de Zipf denominado *expoente de Zipf local*. Esse expoente de Zipf local seria amplamente consistente com a lei de Zipf. Em outro trabalho, Okabe (1987) mostra as condições necessárias e suficientes para o que ele chamou de regra de *rank-size* robusta, ou seja, uma regra de *rank-size* robustamente válida para cada escolha do limiar da densidade populacional urbana para a qual as populações das cidades são determinadas.

Para testar a lei de Zipf, uma abordagem diferenciada foi utilizada por Nitsch (2005). O autor utilizou uma meta-análise para estimar os coeficientes de Zipf. Em sua conclusão, achou que as estimativas de  $\zeta$  são, em média, estatisticamente maiores que 1. Com isso, a suposição de que a distribuição do tamanho das cidades é melhor descrita por uma lei de potência com expoente 1 seria equivocada.

Alguns autores adicionam à equação (11) um termo que eleva ao quadrado o logaritmo da população, obtendo:

$$\ln N(n_i) = \ln A - \zeta \ln n_i + \eta (\ln n_i)^2 + \varepsilon_i \quad (12)$$

A idéia desta regressão é captar algum tipo de não linearidade na relação entre ordem e tamanho das cidades. O sinal estimado do parâmetro  $\eta$  indica se a distribuição do tamanho das cidades é côncava ou convexa. Um coeficiente  $\eta > 0$ , implica distribuição convexa, o que indica um sobre-dimensionamento das cidades maiores e menores assim como um sub-dimensionamento das cidades médias, sendo esta consideração feita relativamente à previsão de Zipf. No caso em que  $\eta < 0$  tem-se a situação oposta.

#### 4. DADOS E RESULTADOS

Os dados utilizados no artigo foram obtidos no IPEA-data e referem-se às populações dos municípios do estado de Minas Gerais para os anos de 1920, 1940, 1950, 1960, 1970, 1980, 1991 e 2000. O tamanho da amostra varia significativamente entre o primeiro e o último ano. Em 1920 eram apenas 178 municípios contra 853 em 2000. Ainda referindo-se aos períodos inicial e final, a maior cidade do estado em 1920, Teófilo Otoni, possuía 163.199 habitantes. Em 2000, Belo Horizonte, possuía 2.238.527 habitantes. As estatísticas descritivas dos dados podem ser observadas no anexo 1 ao final do trabalho.

Os resultados das estimativas das equações (11) e (12), para toda amostra, podem ser observados na tabela 1 abaixo. Além destas regressões estimaram-se as equações (11) e (12) para os 100 e 50 maiores municípios para cada ano da amostra. Apresentamos estes resultados nas tabelas 2 e 3, respectivamente. Podemos observar que o coeficiente de Pareto é muito sensível a mudanças no tamanho da amostra, o que é compatível, em parte, com alguns resultados na literatura, como Rosen e Resnick (1980), Guérin-Pace (1995) e Ruiz (2005). Ruiz (2005, p. 725) chega a argumentar que “a lei

<sup>2</sup> Segundo essa Lei as taxas de crescimento de uma cidade e sua variância são independentes do seu tamanho.

de Zipf é válida somente para os extratos superiores da distribuição de cidades; a ‘cauda’ da distribuição não segue esta regra”. Conforme são desconsideradas as menores cidades da amostra, o coeficiente de Pareto aumenta, ou seja, tem-se um processo de desconcentração urbana. Esse processo pode sinalizar a presença de uma concentração populacional no extrato superior do ordenamento das cidades.

**TABELA 1. Coeficientes estimados para as equações (11) e (12) para toda amostra– Minas Gerais – 1920 – 2000.**

Ano	eq. (11)		eq. (12)			n° obs
	$\zeta$	R <sup>2</sup>	$\zeta$	$\eta$	R <sup>2</sup>	
1920	1.180493 (0.0431063)	0,8099	11.47313 (0.2451267)	-0.6253123 (0.012102)	0,9883	178
1940	1.392653 (0.0348593)	0,848	10.19384 (0.2857515)	-0.585598 (0.0144264)	0,9776	288
1950	1.345585 (0.0244868)	0,8869	5.859215 (0.2379094)	-0.3672974 (0.0121095)	0,9667	387
1960	1.113064 (0.0179582)	0,8887	4.009552 (0.1455254)	-0.2640811 (0.0074862)	0,969	483
1970	1.053003 (0.0119151)	0,9156	2.377351 (0.0921177)	-0.1817983 (0.004868)	0,9713	722
1980	0.9639936 (0.0098886)	0,9296	1.749027 (0.063049)	-0.1426549 (0.0033038)	0,9713	722
1991	0.910802 (0.0088959)	0,9356	1.599036 (0.0471296)	-0.1304432 (0.0024406)	0,987	723
2000	0.9567495 (0.0062932)	0,9645	0.856523 (0.0386474)	-0.0935411 (0.0019864)	0,9902	853

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

**TABELA 2. Coeficientes estimados para as equações (11) e (12) para as 100 maiores cidades – Minas Gerais – 1920 – 2000.**

100 maiores cidades					
Ano	eq. (11)		eq. (12)		
	$\zeta$	R <sup>2</sup>	$\zeta$	$\eta$	R <sup>2</sup>
1920	-2.155975 (0.0494373)	0.951	16.25984 (0.872095)	-0.8502372 (0.040252)	0.9912
1940	-2.459276 (0.0473347)	0.965	-2.110641 (1.451948)	-0.0161622 (0.0672739)	0.965
1950	-2.118367 (0.0395424)	0.967	-9.809726 (0.5768763)	0.3496963 (0.0262064)	0.9884
1960	-1.878005 (0.0429754)	0.9512	-9.631809 (0.3876011)	0.3428687 (0.0171188)	0.9905
1970	-1.60038 (0.0435099)	0.9325	-7.936599 (0.34156)	0.2763227 (0.0148686)	0.9852
1980	-1.401492 (0.0272157)	0.9644	-4.998261 (0.2700292)	0.1548875 (0.0116072)	0.9874
1991	-1.324676 (0.0196623)	0.9789	-3.243447 (0 .2835268)	0.0817624 (0.0120617)	0.9857
2000	-1.205882 (0.0145792)	0.9859	-1.745519 (0.2569681)	0.0229281 (0.0109011)	0.9865

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

**TABELA 3. Coeficientes estimados para as equações (11) e (12) para as 50 maiores cidades – Minas Gerais – 1920 – 2000.**

50 maiores cidades					
Ano	eq. (11)		eq. (12)		
	$\zeta$	R <sup>2</sup>	$\zeta$	$\eta$	R <sup>2</sup>
1920	-2.867489 (0.0535046)	0.9836	6.316238 (2.507438)	-0.410219 (0.111982)	0.9872
1940	-2.685636 (0.0929059)	0.9457	-19.57997 (2.082311)	0.7575911 (0.0933374)	0.9774
1950	-1.949495 (0.0667708)	0.9467	-13.70032 (0.8018809)	0.5192512 (0.0354114)	0.9904
1960	-1.683858 (0.0714427)	0.9205	-12.2879 (0.6069365)	0.4541026 (0.0259666)	0.9894
1970	-1.400238 (0.0678403)	0.8987	-9.86282 (0.4915553)	0.3556525 (0.0206309)	0.9862
1980	-1.295281 (0.0482587)	0.9375	-7.167813 (0.3810064)	0.2423662 (0.0157033)	0.9897
1991	-1.287782 (0.0373916)	0.9611	-5.974955 (0.3595821)	0.1908217 (0.0146216)	0.9916
2000	-1.225517 (0.0283906)	0.9749	-4.387269 (0.4168248)	0.1278843 (0.0168415)	0.9887

Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

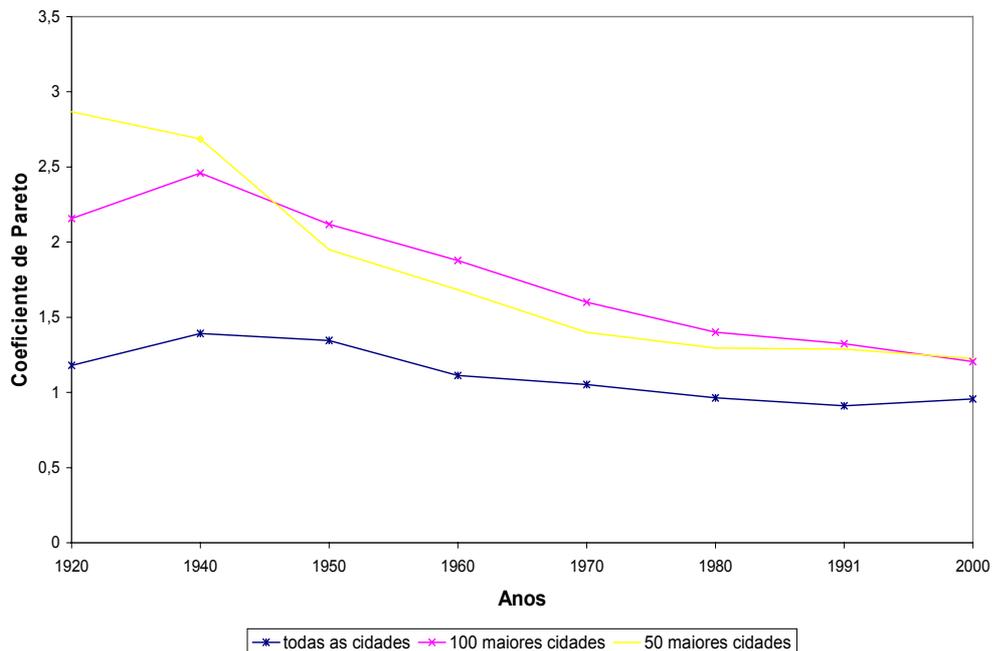
No caso particular de Minas Gérias, estudado no presente trabalho, o coeficiente têm uma mudança significativa quando passamos a considerar apenas as 50 maiores cidades, em vez de toda a amostra. Neste caso, o coeficiente estimado chega a aumentar duas vezes e meia em 1920. Observa-se que o coeficiente de Pareto aproxima-se da unidade ao longo do período sob análise. No entanto, o coeficiente não é estatisticamente igual a um em nenhuma das regressões estimadas. No que tange a amostra completa, em 1991 este coeficiente atinge seu valor mínimo. Ou seja, neste ano verificou-se a maior desigualdade na distribuição do tamanho das cidades mineiras em favor das maiores cidades. Em 2000 o coeficiente apresenta uma elevação, contudo, ainda permanece abaixo do previsto pela lei de Zipf.

O gráfico 1 abaixo ajuda a visualização da convergência dos valores estimados do parâmetro de Pareto à lei de Zipf. Além da evolução do parâmetro estimado correspondendo ao total de cidades na amostra para cada ano, neste gráfico apresenta-se a evolução do parâmetro para as sub-amostras relativas as 100 e 50 maiores cidades ao longo do período de 1920 a 2000<sup>3</sup>. Observe que para os períodos iniciais havia uma menor concentração no topo da amostra. Isto é, considerando-se apenas as 100 e 50 maiores cidades, como já discutido anteriormente, a distribuição do tamanho das cidades é menos desigual. Em 1920, por exemplo, tomando a amostra correspondente as 50 maiores cidades, o coeficiente estimado de Pareto apresentou um valor bastante elevado próximo a três<sup>4</sup>, o que é pouco usual na literatura.

<sup>3</sup> No presente trabalho procura-se acompanhar a evolução da distribuição do tamanho das cidades em Minas Gerais e não a evolução de cada cidade nesta distribuição. Assim, as 100 ou 50 maiores cidades em 1960, por exemplo, não necessariamente são as mesmas dos demais anos analisados.

<sup>4</sup>Neste caso o coeficiente estimado foi 2,87.

**Gráfico 1: Evolução do Coeficiente de Pareto – Minas Gerais: 1920 - 2000**

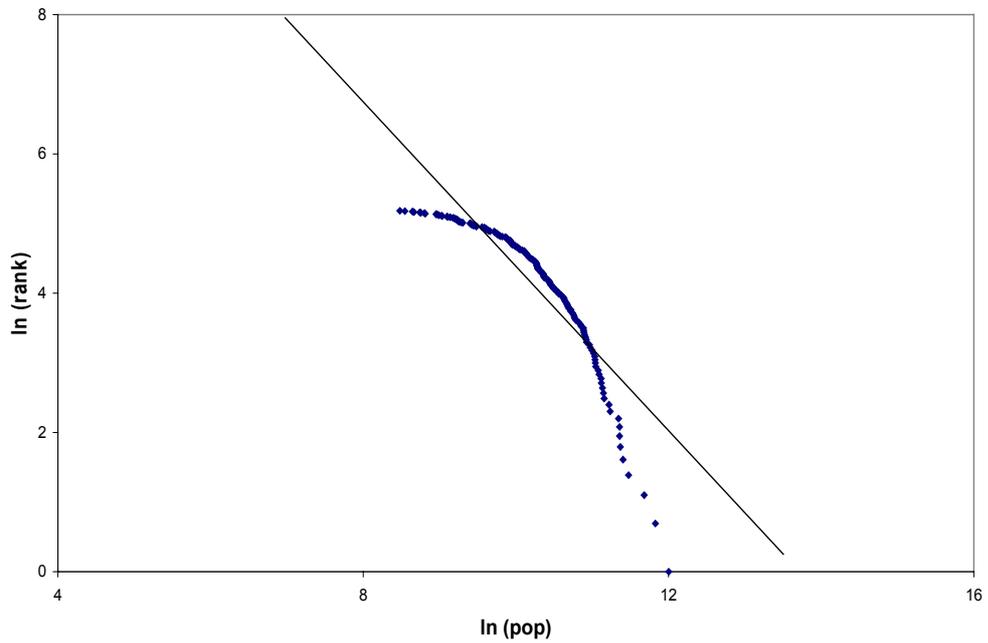


Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

A quarta e a quinta colunas da tabela 1 reportam os valores estimados dos parâmetros da equação (12) para toda a amostra. Pode-se observar que a distribuição das cidades apresenta uma concavidade (sinal negativo de  $\eta$ ), neste caso as cidades menores, assim como as maiores, possuem populações menores do que prevê a regra de Zipf. No entanto, ao longo do tempo o coeficiente do termo quadrático se aproxima de zero. De fato, a distribuição das cidades ao longo de nosso período vai se ajustando a linha de tendência<sup>5</sup>. Isto pode ser visto nos gráficos 2 a 4 abaixo. O fato peculiar é que nos anos recentes a cidade de Belo Horizonte aparece como sendo sub-dimensionada, apesar de sua população ser quatro vezes maior que a segunda maior cidade.

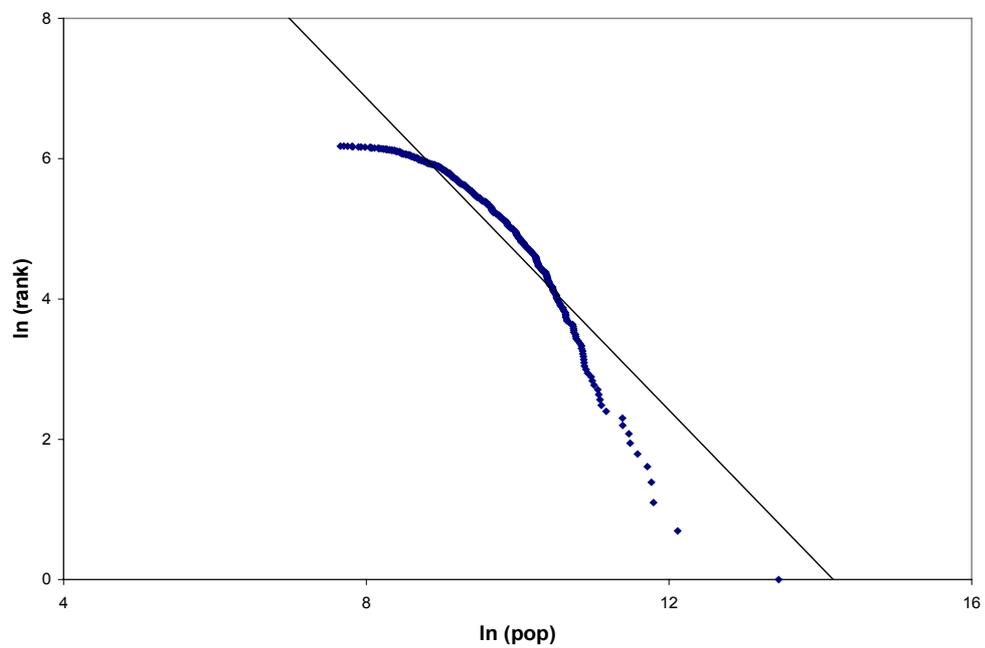
<sup>5</sup> Isto é, a distribuição vai se aproximando ao previsto pela lei de Zipf.

**Gráfico 2: Distribuição do tamanho de cidades – Toda amostra – Minas Gerais -1920**



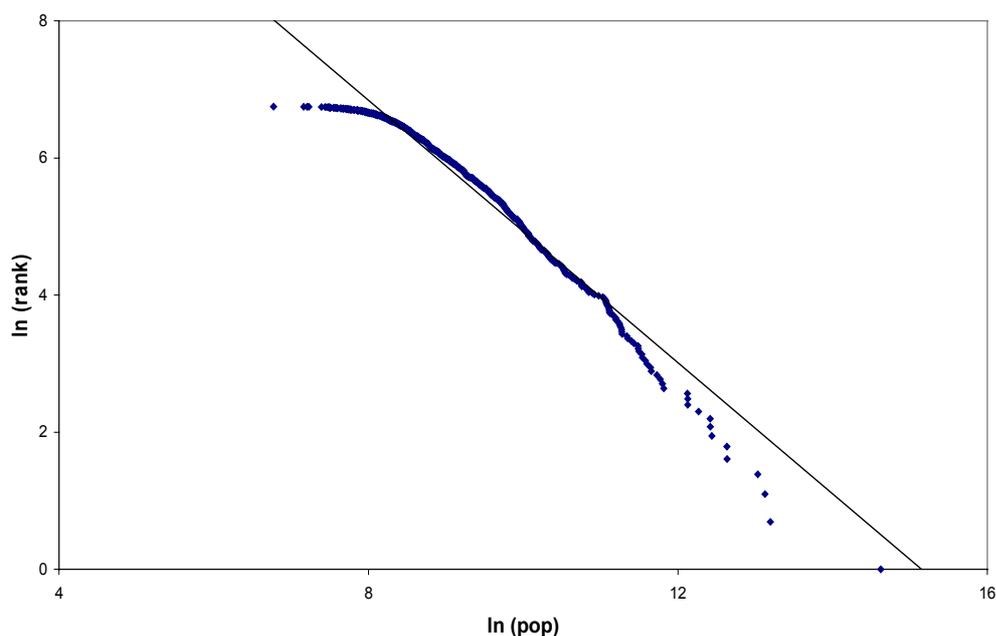
Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

**Gráfico 3: Distribuição do tamanho de cidades – Toda amostra – Minas Gerais -1960**



Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

**Gráfico 4: Distribuição do tamanho das cidades – Toda amostra – Minas Gerais - 2000**

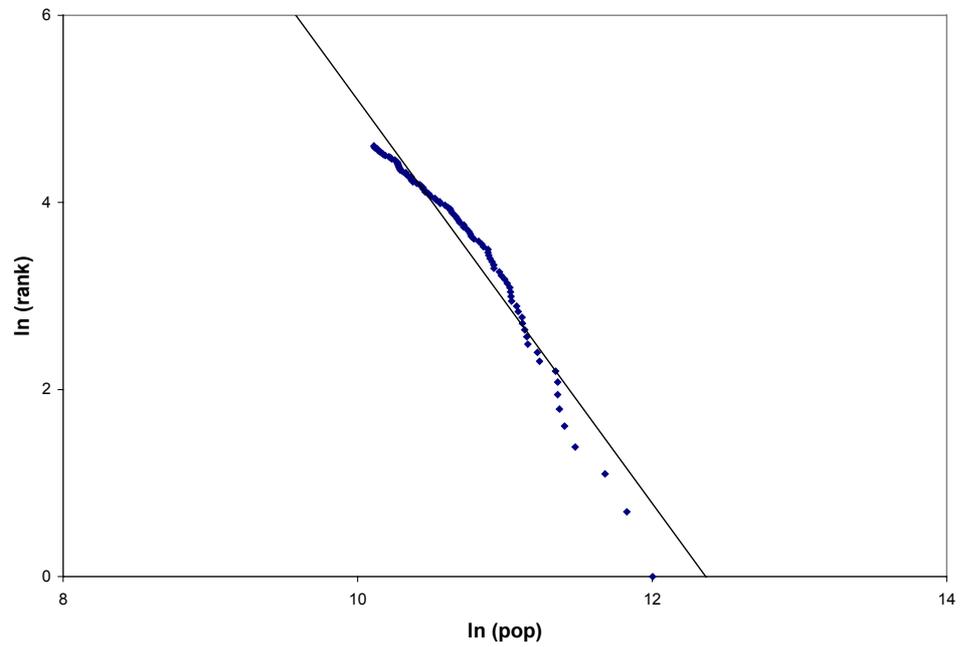


Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

A sensibilidade dos resultados frente ao tamanho da amostra, discutido anteriormente, novamente é observado quando estimamos a equação (12) para as 100 e 50 maiores cidades, tabelas 2 e 3, respectivamente. Nota-se que  $\eta$  apresenta um sinal positivo, com exceção dos primeiros anos<sup>6</sup>, e conseqüentemente, nos anos recentes, a distribuição tende a apresentar uma certa convexidade. Tal resultado confere com o observado na literatura, no que diz respeito ao Brasil, tal como Ruiz (2005). Nestes novos resultados várias cidades médias aparecem como sub-dimensionadas. Essa fragilidade das cidades médias já foi documentada, no que tange ao Brasil, por Andrade e Serra (1999), Pereira e Lemos (2003), assim como o já citado Ruiz (2005) que, ao comparar as estruturas urbanas entre Brasil e Estados Unidos, conclui que as cidades médias brasileiras são menores que as estadunidenses. Podemos visualizar isso nos gráficos 5 a 7 abaixo, observe que Belo Horizonte aparece como super-dimensionada em 1960 e 2000.

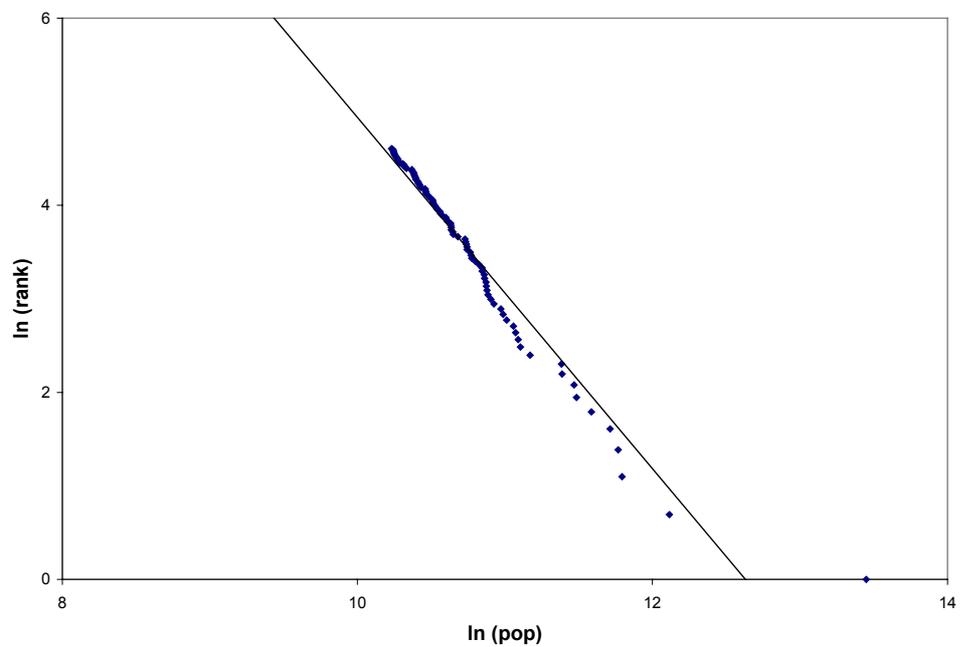
<sup>6</sup> 1920 e 1940 para as 100 maiores cidades e 1920 para as 50 maiores cidades.

**Gráfico 5: Distribuição do tamanho das 100 maiores cidades – Minas Gerais - 1920**



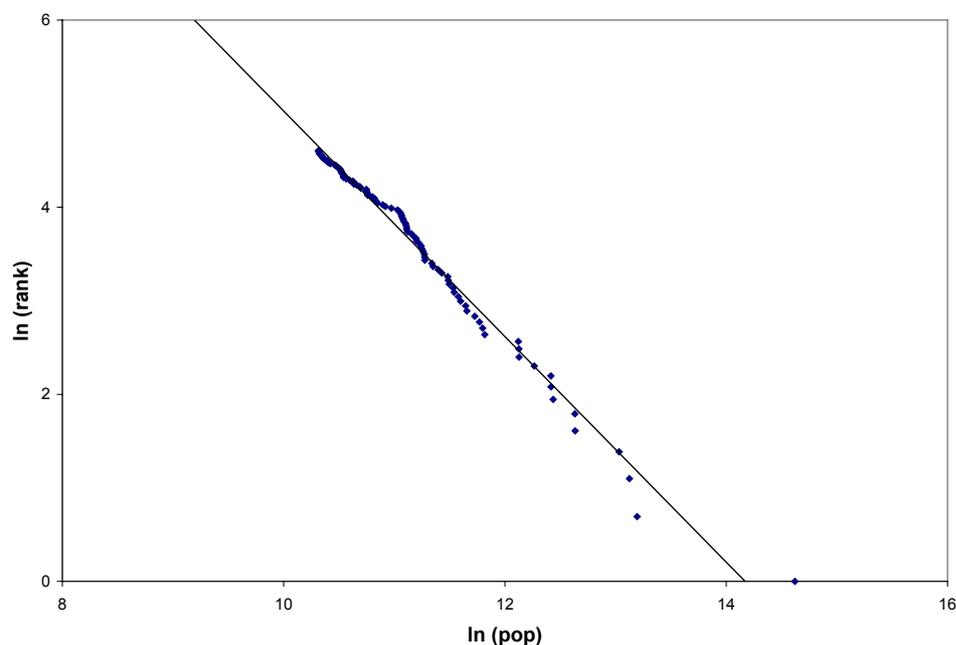
Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

**Gráfico 6: Distribuição do tamanho das 100 maiores cidades – Minas Gerais - 1960**



Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

**Gráfico 7: Distribuição do tamanho das 100 maiores cidades – Minas Gerais -2000**



Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

A diminuição do coeficiente de Pareto e a mudança de sinal do coeficiente quadrático na estimação de (12)<sup>7</sup> sinalizam um processo concentrador nas cidades de Minas Gerais ao longo do século 20. Esse processo de concentração pode ser entendido pelos argumentos de Henderson (2003). Para o autor nos estágios iniciais de desenvolvimento econômico é proveitoso um certo grau de concentração. No caso brasileiro, o período observado é caracterizado por um processo de urbanização e desenvolvimento econômico muito acentuados<sup>8</sup>. A concentração das atividades nas grandes metrópoles seria conseqüência da escassez de infra-estrutura econômica nas menores cidades, que levaria as forças centrípetas superarem as forças centrífugas<sup>9</sup>. É o que aconteceu com Belo Horizonte. Quando levamos em conta que no período inicial a capital mineira não figurava entre as maiores cidades<sup>10</sup>, alguma variável exógena deve explicar tal fato. Esta variável poderia ser, por exemplo, favorecimento político. Isso pode ocorrer em situações em que a democracia não está totalmente consolidada e há uma grande centralização de recursos. No decorrer de sua história o Brasil possui vários exemplos de atividades em certas cidades objetivando receber algum favorecimento.

<sup>7</sup> O sinal só muda para as 50 e 100 maiores cidades. Além disso, pelos gráficos de ajuste desta regressão, podemos notar que a distribuição não é necessariamente convexa. O que está ocorrendo é que, ao longo do período sob análise, se consideradas apenas as maiores cidades, a distribuição de seus tamanhos está se aproximando da lei de Zipf.

<sup>8</sup> Principalmente se considerarmos o período de 1920 a 1980.

<sup>9</sup> Na terminologia da Nova Geografia Econômica, as chamadas forças centrípetas estariam associadas aos retornos crescentes de se estabelecer nas cidades, levando a aglomeração das atividades; as forças centrífugas estariam associadas a retornos decrescentes, ou seja, forças que levariam a dispersão das atividades. Para maiores informações ver FUJITA *et ali* (2002)..

<sup>10</sup> Em 1920 Belo Horizonte não figurava entre as 20 maiores cidades mas já em 1940 ela aparecia como a maior cidade.

## 5. LEI DE GIBRAT E CRESCIMENTO DAS CIDADES

Como observado em Gabaix (1999a), explicações a respeito da verificação empírica da lei de Zipf podem ser divididas em duas linhas. Uma estaria baseada em argumentos econômicos, explicando a ocorrência de  $\zeta = 1$  a partir do balanceamento de fatores como custos de transporte, externalidades positivas e negativas e diferenças de produtividade. Note a fragilidade de tal argumento. Como explicar o fato de que ambientes econômicos distintos gerem este mesmo resultado? A segunda linha alicerça seu argumento sobre processos aleatórios. Tomando como referência o modelo de Herbert Simon, o qual prevê que o expoente em (11) se iguala ao quociente entre a taxa de crescimento do número de cidades e a taxa de crescimento da população das cidades existentes, nota-se que este deveria ser menor do que 1 ou, como observa Gabaix “...probably tends to 0 in the long run” (p. 129), dado que a taxa de surgimento de novas cidades tende a diminuir com o tempo. Ou seja, esta segunda linha também apresenta fragilidades.

Verificado isto, Gabaix (1999a) sugere que a lei de Zipf é consequência da lei de Gibrat, esta última entendida como a situação em que a taxa de crescimento das cidades independe de seus tamanhos. Ou seja, se as cidades crescem de forma aleatória, independentemente de seu tamanho inicial, com a mesma taxa esperada de crescimento e o mesmo desvio padrão, a distribuição limite do tamanho das cidades convergirá à lei de Zipf.

Black e Henderson (2003), testam a Lei de Gibrat estimando a seguinte equação para um painel de cidades:

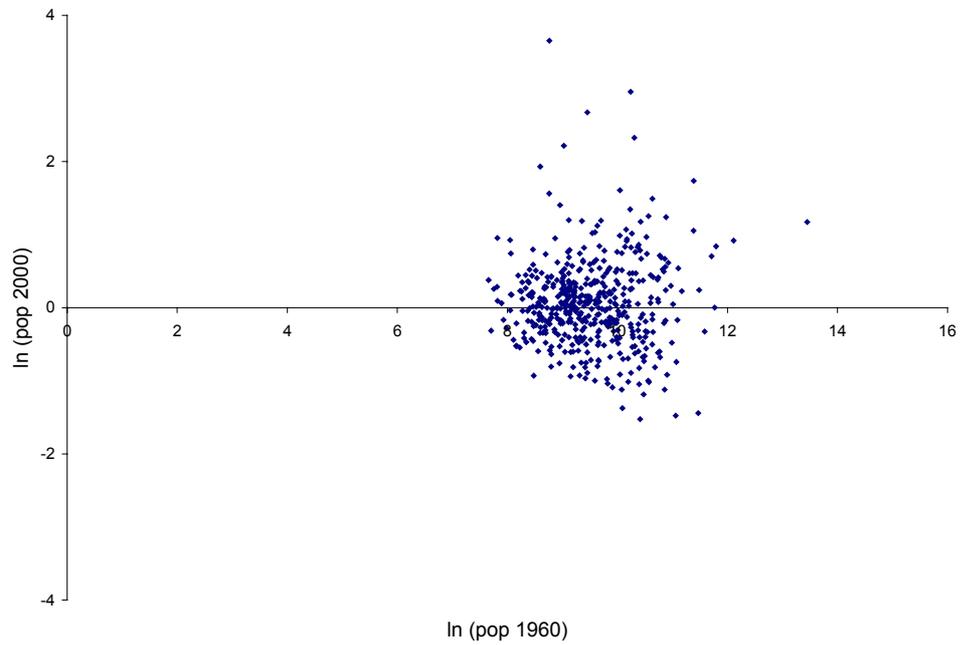
$$\log(n_{it}) - \log(n_{it-1}) = \alpha + \delta_t + \beta \log(n_{it-1}) + \varepsilon_{it} \quad (14)$$

onde  $\varepsilon_{it} \sim N(0, \sigma^2)$ .

Para aceitar-se a hipótese da lei de Gibrat, o coeficiente estimado do log da população da  $i$ -ésima cidade em  $t-1$  deve ser igual a zero. Os autores encontram, no entanto, um coeficiente menor do que zero em várias circunstâncias e subamostras rejeitando, desta forma, a lei de Gibrat. Glaeser *et al.* (1995), estudam os fatores determinantes do crescimento populacional das cidades. São feitas várias especificações, sendo que em todas o coeficiente do log da população inicial é negativo e muito próximo a zero. O mesmo resultado é encontrado empregando-se métodos não-paramétricos em Ioannides e Overman (2003). Contudo, estes autores mostram que suas estimativas encontram-se dentro dos intervalos de confiança estimados. Como resultado, pode-se concluir que, mesmo que o crescimento das cidades seja função de seu tamanho, há a possibilidade de que a lei de Gibrat se verifique.

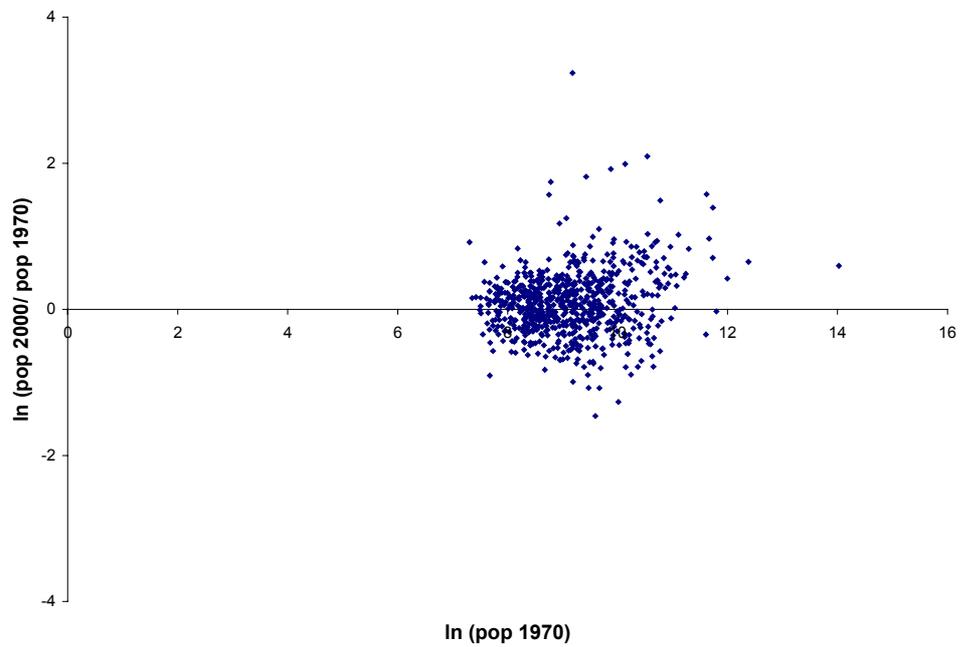
Os gráficos abaixo referem-se à dispersão conjunta entre população no período inicial (1960, 1970, 1980 e 1991) e o crescimento populacional das cidades até 2000. Apesar de em 1960 e 1970 os gráficos indicarem alguma correlação positiva entre população inicial e crescimento, para os anos de 1980 e 1991 a correlação é muito baixa. Isto seria uma evidência, ainda que não definitiva, da lei de Gibrat, como fonte de uma distribuição limite de Pareto, cuja qual o coeficiente é um. Como observado anteriormente, o coeficiente de Pareto vem se aproximando de um ao longo das décadas no estado de Minas Gerais, ou seja, suas cidades tendem a distribuírem-se conforme atesta a lei de Zipf.

**Gráfico 8: Dispersão  $\ln(\text{pop } 1960)$  x  $\ln(\text{pop } 2000/\text{pop } 1960)$**



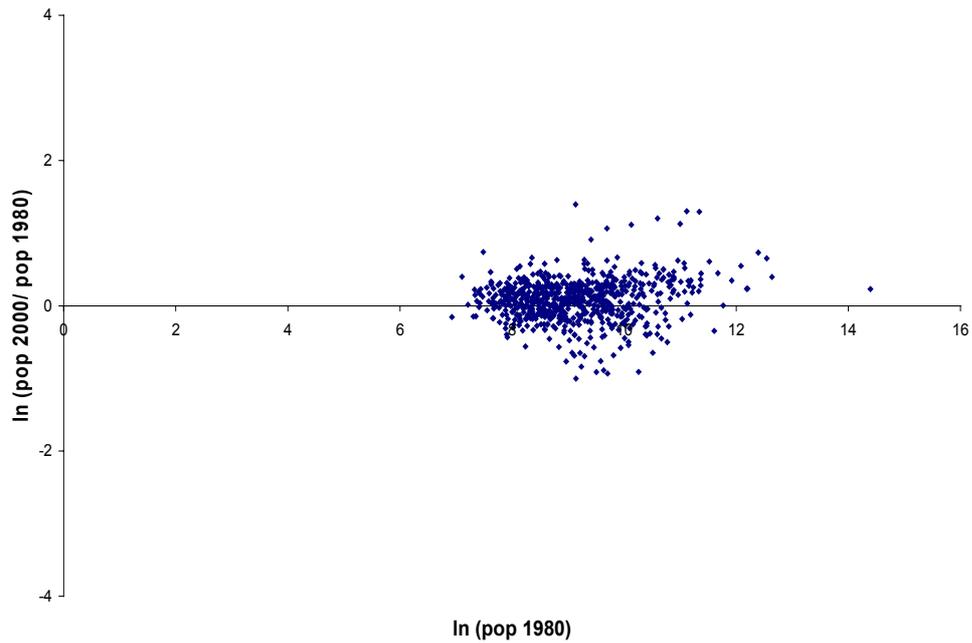
Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

**Gráfico 9: Dispersão  $\ln(\text{pop } 1970)$  x  $\ln(\text{pop } 2000/\text{pop } 1970)$**



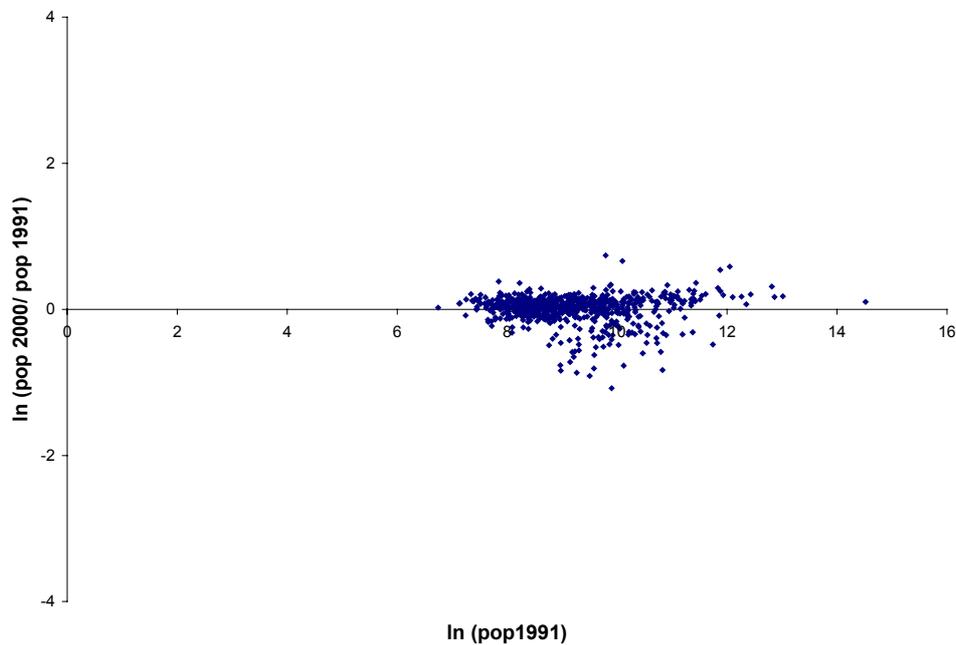
Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

**Gráfico 10: Dispersão  $\ln(\text{pop } 1980)$  x  $\ln(\text{pop } 2000/\text{pop } 1980)$**



Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

**Gráfico 11: Dispersão  $\ln(\text{pop } 1991)$  x  $\ln(\text{pop } 2000/\text{pop } 1991)$**



Fonte: Elaboração própria a partir dos dados do IPEA-data

Contudo, cabe destacar que não se pode afirmar que crescimento populacional e população inicial não estejam correlacionados. Para que tal afirmação pudesse ser feita, deveríamos comparar essas duas variáveis considerando as Áreas Mínimas Comparáveis (AMCs). Note que, ao considerarmos apenas os municípios que existiam no ano inicial de cada um dos gráficos acima,

estamos excluindo a possibilidade de que um município tenha crescido até um determinado ano (anterior a 2000) e que, a partir deste ano, novos municípios tenham se formado, emancipando-se do município então existente. Assim, municípios que na verdade cresceram em grande parte do período podem ter apresentado crescimento negativo, devido à perda de população para estes novos municípios.

## CONCLUSÕES

Este artigo procurou analisar evolução da distribuição do tamanho das cidades do estado de Minas Gerais no período compreendido de 1920 a 2000 através do arcabouço teórico proporcionado pela chamada lei de Zipf. Os resultados nos mostram um processo concentrador, em termos populacionais, a favor dos grandes centros urbanos, Belo Horizonte no presente caso, ao longo do século 20. Argumentou-se que tal concentração pode ter sido resultado de um desequilíbrio das chamadas forças centrípetas e centrífugas. Mas temos que ter um certo cuidado com tal conclusão. No período de análise foram criadas 675 novas cidades<sup>11</sup>, o que não acontece se analisarmos regiões ou países europeus. Esse dado reflete um certo problema em analisar a evolução da rede urbana de Minas Gerais, pois o surgimento dessas novas cidades não estaria necessariamente relacionada ao confronto entre forças centrípetas e centrífugas. Oliveira (2005, p. 8) argumenta que essas novas cidades “são o resultado de uma criação política de cidades a fim de aperfeiçoar a descentralização das decisões e dos recursos governamentais”. Ou seja, teríamos assim um outro jogo de forças, só que no campo político, de um lado uma força centralizadora de recursos favorecendo as capitais (com os governos estaduais como seus agentes) do outro lado teríamos uma força descentralizadora de recursos (tendo o governo federal como o seu grande agente).

Se as políticas urbanas até então foram um tanto contraditórias, daqui para frente investimentos e incentivos para regiões não-metropolitanas deveriam ser priorizados como estratégia governamental em deter o processo concentrador corrente. Ruiz (2005, p. 735) sugere que “políticas públicas voltadas à criação de infra-estrutura de comunicação, transporte e energia, saneamento básico, políticas de habitação, qualificação de mão-de-obra e de difusão de inovações (parques tecnológicos, centros de pesquisa e universidades) contribuiriam para a redução do elevado ‘custo de transporte’ que atua em favor das grandes cidades e que, provavelmente, estimula a instalação de grandes empresas nas regiões metropolitanas”. A idéia seria a de oferecer infra-estrutura econômica às menores cidades e áreas não urbanas, o que incentivariam não só a ida de empresas para os pequenos centros, mas também a migração de uma parte da massa populacional das grandes cidades.

## BIBLIOGRAFIA

- ANDRADE, T.; SERRA, R. V. Crescimento econômico nas cidades médias brasileiras. *Revista Nova Economia*, v.9, n.1, 1999.
- AUERBACH, F., Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration. *Petermann's Geographische Mitteilungen*, 59, p. 74-76, 1913.
- BECKMANN, M. J., City hierarchies and the distribution of city size. *Economic Development and Cultural Change*, 6, p. 243-248, 1958.
- BLACK, D.; HENDERSON, V., Urban evolution in the USA. *Journal of Economic Geography*, v. 3, p. 343-372, 2003.

---

<sup>11</sup> Em 1920 havia 178 cidades em Minas Gerais e em 2000 esse número passou para 853.

DA MATTA, D., DEICHMANN, U., HENDERSON, J.V., Lall, S.V., Determinants of City Growth in Brazil. *Textos para Discussão*, nº1112, IPEA. Brasília, 2005.

\_\_\_\_\_, Examining the Growth Patterns of Brazilian Cities. *Textos para Discussão*, nº1113, IPEA. Brasília, 2005.

FUJITA, M.; KRUGMAN, P. R.; MORI, T. On the Evolution of Hierarchical Urban Systems. *European Economic Review*, 43, p. 209-251, 1999.

\_\_\_\_\_; VENABLES, A. J., *Economia Espacial: urbanização, prosperidade econômica e desenvolvimento humano no mundo*. Editora Futura: São Paulo, 2002.

GABAIX, X., Zipf's Law for Cities: An Explanation. *Quarterly Journal of Economics*, 114, p. 739-767, 1999a.

GABAIX, X. Zipf's Law and the Growth of Cities. *American Economic Review Papers and Proceedings*, may, p. 129-132, 1999b.

GLAESER, E., SCHEINKMAN, J.A., SHLEIFER, A. Economic Growth in Cross-Section of Cities. NBER working paper # 5013, 1995.

GUÉRIN-PACE, F., Rank-size distribution and the process of urban growth. *Urban Studies*, 32, p. 551-562, 1995.

HENDERSON, V., The urbanization process and economic growth: the so-what question. *Journal of Economic Growth*, v. 8, p. 47-71, 2003.

IOANNIDES, Y. M.; OVERMAN, H. G., Zipf's Law for cities: an empirical examination. *Regional Science and Urban Economics*, 33, p. 127-137, 2003.

NITSCH, V. Zipf zipped. *Journal of Urban Economics*, 57, p. 86-100, 2005.

OKABE, A. A Theoretical relationship between the Rank-Size Rule and Clark's Law of Urban Population Distribution: Duality in the Rank-Size Rule. *Regional Science and Urban Economics*, 17, p. 307-319, 1987.

OLIVEIRA, C. A evolução da distribuição do tamanho das cidades brasileiras: 1936-2000. *Texto para discussão*, n. 22, Universidade de Passo Fundo, 2005.

PEREIRA, F. M.; LEMOS, M. B. Cidades medias brasileiras: características e dinâmicas urbano industriais. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, v. 33, n.1, p. 127-165, 2003.

RICHARDSON, H. *The economics of urban size*. Lexington Books, 1973.

ROSEN, K., RESNICK, M., The size and distribution of cities: An examination of the Pareto Law and Primacy. *Journal of Urban Economics*, 81, 165-186, 1980.

RUIZ, R. M., Estruturas Urbanas Comparadas: Estados Unidos e Brasil. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, julho, p. 715-737, 2005.

ZIPF, G., *Human Behavior and the Principle of Last Effort*. Cambridge, MA: Addison-Wesley, 1949.