Dinâmica endógena de firmas formadas por agentes em rede: uma análise exploratória

Endogenous dynamics of firms made up by networked agents: an exploratory analysis

Bernardo Alves Furtado – Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada

Alexandre Messa – Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada

Isaque Daniel Rocha Eberhardt – Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada/Universidade de Brasília

Aguinaldo N. Maciente – Instituto de Pesquisa Econômica Aplicada

Resumo: Este artigo parte da ideia de que a firma é o meio institucional para que trabalhadores atuem em conjunto e obtenham ganhos de escala, para em seguida investigar o processo de agregação de indivíduos em firmas, e identificar a dinâmica resultante. Um modelo baseado em agentes em rede é adaptado a partir de Axtell (2013) e simulado para o caso de Belo Horizonte e municípios vizinhos, com duas opções de associação em rede dos trabalhadores. Os resultados replicam dados empíricos agregados e caracterizam maior volatilidade intrínseca no modelo cuja rede de contatos é restrita a seu próprio município.

Palavras-chave: firmas, modelagem baseada em agentes, rede, dinâmica de firmas

ÁreaTemática: 2. EconomiaMineira

Abstract: The firm is the institutional means that employees use to work together and achieve economies of scale whereas applying the same level of effort. This work investigates the dynamic process of aggregation of individuals in firms, reflecting the dynamics of the firms themselves. A network-based agent-model is adapted from Axtell (2013) and simulated for the case of Belo Horizonte and neighboring municipalities, with two network alternatives. The results are able to replicate empirical aggregate data. They also show a higher intrinsic volatility in the model which the contact network is restricted to by municipality.

Keywords:firms, agent-based modeling, network, firms' dynamics

JEL Code: D22, C63, R32

1. Introdução

A hipótese de Coase (1937) sobre a natureza da firma faz uso do princípio de que as organizações servem ao propósito de reduzir os custos de transação, implicando na ideia da firma como o resultado ótimo a partir de restrições contratuais, e não necessariamente como resultado de limitações produtivas. Dessa forma, os atributos, tanto implícitosquanto explícitos, do desenho dos contratos seriamimplementadosno intuito de se minimizar os custos de transação entre os fatores especializados de produção. O comportamento da firmaseria então o resultado de um processo complexo de decisão conjuntadentro de uma rede de relações de agência.

Porém, se a firma é resultado de restrições advindas de problemas de agência e contratos incompletos, sua dinâmica é também influenciada pela racionalidade limitada dos indivíduos que a compõem. De fato, conforme salientado por Simon (1976), o tomador de decisões, com frequência, necessita contrastar a qualidade da informação com o custo que se incorre ao tentar melhorá-la. Esta necessidade faz com que a organização acabe por codificar a informação na forma de regras padronizadas que a permita se adaptar rapidamente a novas condições de mercado.

No intuito de se levar em consideração tais complicações no contexto da investigação da dinâmica da firma, dois arcabouços de análise podem ser utilizados. Em primeiro lugar, a ciência da análise de redes (*network science*) permite representar uma variedade de agentes e de conexões entre eles, de forma a se investigar a estrutura e dinâmica que resulta de suas decisões.[1] Em segundo lugar, a implementação computacional da análise de redes pode ser feita por meio da modelagem baseada em agentes (*agent-based modeling*).[2]

Com base em tais arcabouços, este artigo tem o objetivo de investigar a dinâmica das firmas – abertura, fechamento, idade, tamanho e produção – a partir de uma rede de contatos dos trabalhadores, adaptando um modelo baseado em agentespara o caso de Belo Horizonte e municípios vizinhos.

O modelo construído neste artigo parte de Axtell (2013). Neste, cada indivíduo adquire utilidade a partir do consumo e do lazer. Para obter bens de consumo, no entanto, eles precisam abrir mão de parte de seu lazer, e produzi-los. Cada indivíduo pode, de início, produzir os próprios bens de consumo. Ou então pode juntar-se a outros indivíduos, aproveitar eventuais ganhos de escala resultantes dessa união, e produzir mais bens para satisfazer seu consumo (ou a mesma quantidade de bens com maior tempo para o lazer). Porém, se a reunião dos indivíduos em grupos (ou, no caso, em firmas) gera eventuais ganhos de escala, ela também dá origem a um problema de *free-rider*. De fato, como o esforço de cada indivíduo não é observável, cada trabalhador tem o incentivo de poupar esforço e se aproveitar do esforço dos demais trabalhadores.

Com isso, obtém-se duas forças para a dinâmica da firma que atuam em sentidos opostos: enquanto os ganhos de escala geram incentivos para os trabalhadores se reunirem, o problema de *free-rider* impõe limites ao tamanho desses grupos ou firmas.

No intuito de explorar essa dinâmica endógena das firmas, construiu-se um modelo computacional.Para tal, admite-se inicialmenteque cada trabalhador possui uma rede de contatos entre três e cinco agentes. A cada período, um percentual dos trabalhadores (no presente artigo, 4% deles) compara a utilidade obtida em suas firmas atuais com a possibilidade de criar uma nova firma ou de se juntar às firmas de cada um

---

[1] Para exemplos de trabalhos nesse sentido, vide Clauset, Moore e Newman (2008), Newman, Barabási e Watts (2006), Granovetter (1985) e Putnam (1993).

[2] Vide, por exemplo, Arthur (1999), David, Sichman e Coelho (2005), Epstein (2011), Epstein e Axtell (1996), Nardin e Sichman (2012) e Furtado e Van Delden (2011).

de seus contatos. Desta comparação, cada trabalhador escolhe a opção que lhe garanta um maior nível de utilidade. As decisões realizadas pelos trabalhadores a cada período geram então a dinâmica de crescimento ou redução no tamanho das firmas, além do fluxo de entrada e saída de firmas na economia.

Além disso, o modelo computacional introduz duas fontes de heterogeneidade. No que diz respeito aos indivíduos, eles possuem preferências distintas quanto à obtenção de utilidade por meio do consumo ou do lazer (essas preferências são determinadas por um parâmetro aleatório, com realizações distintas para cada indivíduo). Por sua vez, no que se refere às firmas, os parâmetros de suas funções de produção são também aleatórios, resultando em retornos variáveis entre elas.

A simulação do modelo computacional foi realizada inserindo-se parâmetros referentes à Região Metropolitana de Belo Horizonte, e seus resultados comparados com os dados presentes na Relação Anual de Informações Sociais (RAIS) do Ministério do Trabalho e Previdência Social (MTPS).

No intuito de se observar os efeitos das interações especiais sobre a dinâmica das firmas, foram utilizadas duas versões do modelo. A primeira consiste no modelo descrito acima,baseado no número de trabalhadores para Belo Horizonte e seus principais vizinhos para o ano de 2010. A segunda versão introduz a questão espacial,restringindo a rede de contato dos agentes apenasàqueles que moram no mesmo município.

Para lograr os objetivos propostos, este trabalho conta com cinco seções, além desta introdução. As seções 2 e 3 introduzem, respectivamente, os modelos da firma e sua implementação computacional desenvolvidos. A seção 4 apresenta os resultados obtidos para o modelo cuja redeconsidera Belo Horizonte e seus vizinhos, a seção 5 o faz a partir da inserção de restrições às redes dos agentes. Finalmente, a última seção discute as considerações finais.

2. Definições preliminares

Considere uma economia com $n \in \mathbb{N}$ indivíduos. Cada indivíduo $i = 1, \dots, n$ obtém utilidade a partir de seu consumo $c_i \in \mathbb{R}_+$ e seu lazer $l_i \in [0,1]$, de tal forma que

$$U(\theta_i) = c_i^{\theta_i} l_i^{1-\theta_i}, \tag{1}$$

em que $\theta_i \sim U(0,1)$ é um parâmetro aleatório intrínseco a cada indivíduo.

Os bens de consumo dessa economia são produzidos pelas firmas $j = 1,2, \dots$, cada uma delas composta por n_j trabalhadores. Cada trabalhador exerce um esforço $e_i \in [0,1]$, de tal forma que o esforço total dos trabalhadores da firma é representado por $E = \sum_{i=1}^{n_j} e_i$. A função de produção da firma é dada por

$$Y(E) = aE + bE^{\beta}, \tag{2}$$

em que $a \geq 0, b > 0$ e $\beta > 1$. Oproduto da firma é dividido igualmente entre seus trabalhadores, fazendo com que o consumo de cada um deles seja dado por $c_i = Y/n_j$. Então, o problema do trabalhador é escolher seu esforçoe_i de tal forma a maximizar (1), sujeito a $c_i = Y/n_j$, $l_i = 1 - e_i$, à função de produção (2) e ao esforço dos demais

trabalhadores da firma, $E_{-i} = E - e_i$. Como resultado desse problema de maximização[3], o esforço a ser exercido pelo trabalhador é dado por:

$$e = \max\left\{0, \frac{-a - 2b(E_{-i} - \theta_i) + \sqrt{a^2 + 4b\theta_i^2(1 + E_{-i})[a + b(1 + E_{-i})]}}{2b(1 + \theta_i)}\right\}.$$

Note-se que o arranjo produtivo da firma implica em um problema de *free-rider*: uma vez que se observaapenas o produto da firma, não é possível identificar o esforço de cada trabalhador. Então, cada um deles tem o incentivo de poupar esforço e, dada a regra de repartição igualitária, consumir aproveitando-se do esforço dos demais trabalhadores.

Um resultado de Holmstrom (1982), em uma caracterização semelhante, é que não existe um equilíbrio de Nash que satisfaça a condição ótima de Pareto. Em outras palavras, em qualquer combinação de níveis de esforço por parte dos trabalhadores que seja eficiente no sentido de Pareto, cada trabalhador passa a uma melhor situação caso ele desvie desse arranjo, passe a se esforçar menos e a se aproveitar do trabalho dos outros. Porém, existe um equilíbrio de Nash, ou seja, um arranjo de esforço tal que nenhum dos trabalhadores tem incentivo para se esforçar menos. O problema apenas é que este arranjo não é eficiente no sentido de Pareto, ou seja, se um determinado trabalhador se esforçasse um pouco mais, ele e os demais estariam em uma situação ao menos tão boa quanto antes.[4]

Para o modelo especificado aqui, os resultados acima são provados em Axtell (2013), e reproduzidos abaixo.

Proposição 1: *(a) No problema da firma descrito acima, existe um equilíbrio de Nash; (b) nenhumequilíbrio de Nash é eficiente no sentido de Pareto.*

A ineficiência apontada na proposição acima será importante para gerar a dinâmica de trabalhadores entre as firmas na próxima seção. Para perceber isso, note a seguinte questão: uma vez que as firmas apresentam retornos crescentes de escala, então o melhor para os trabalhadores não seria eles se agruparem em uma única firma? Se o esforço fosse observável (possibilitando que cada trabalhador recebesse o produto correspondente ao seu esforço), a resposta seria positiva. Mas a impossibilidade de se observar oesforçode cada trabalhadorleva ao problema de *free-rider* e ao nível ineficiente de produçãoapontado pela Proposição 1. É intuitivo perceber que, quanto maior o tamanho da firma, mais acentuado é o problema de *free-rider*. Dessa forma, ao se adicionar trabalhadores um a um à firma, surge um tamanho ótimo: quando o trabalhador está sozinho, dado o retorno crescente de escala, ele ganha ao se adicionar um trabalhador a ele; porém, a partir de um determinado número de trabalhadores, a adição de um a mais pode fazer com que a ineficiência gerada pelo problema de *free-rider* seja superior ao ganho consequente do retorno crescente de escala. Por um lado, este fenômeno faz com que não seja ótimo aos trabalhadores se agruparem em uma única firma. Por outro lado, a regra de entrada de trabalhadores a ser desenvolvida na próxima seção fará com que essa ineficiência gere a dinâmica de trabalhadores entre as firmas.

---

[3] Essa expressão para e foi derivada, como exemplo, utilizando o valor de $\beta = 2$.

[4] A exceção é quando a firma é composta por um único agente. Neste caso, obviamente, não há problema de *free-rider*, e o trabalhador emprega o esforço ótimo.

Uma segunda força na dinâmica das firmas é a questão da estabilidade do equilíbrio de Nash. Para perceber esta questão, considere uma firma j, com n_j empregados, tal que o esforço de cada um deles esteja na situação do equilíbrio de Nash$e^{*(n_j)}$ – mais precisamente, $e^{*(n_j)}$é um vetor $1 \times n_j$ em que cada linha representa oesforço de cada empregado, sob a situação em que nenhum delestem incentivos para alterar seus respectivos esforços. Em seguida, suponha que entre na firma um empregado a mais, fazendo com que ela passe a ter $n_j + 1$ trabalhadores. Então, o esforço de cada um deles possivelmente terá um novo equilíbrio de Nash $e^{*(n_j+1)}$. O ajuste de um equilíbrio a outro, porém, não ocorre imediatamente. De fato, quando o novo trabalhador entra na firma, os demais empregados continuarão a exercer, em um primeiro momento, o esforço $e^{*(n_j)}$. Enquanto isso, o novo trabalhador que entra na firma irá exercer o esforço ótimo para ele, dado que os demais exercem $e^{*(n_j)}$. A questão que se coloca é: o esforço de cada trabalhador $n_j + 1$ convergirá ao equilíbrio de Nash $e^{*(n_j+1)}$? A resposta é positiva quando este equilíbrio é estável; e negativa, caso contrário.

A Proposição 2 abaixo mostra que, dada uma função de produção para a firma em questão (isto é, parâmetros a,b e β), a estabilidade do equilíbrio do Nash dependerá do número de trabalhadores e do maior peso, dentro os trabalhadores da firma, do consumo na função de utilidade(ou, dito de outra forma, menor peso para o lazer). Em outras palavras, considere fixo o maior peso θ_{imax} dentre os trabalhadores da firma. Com um único trabalhador na firma, o equilíbrio é obviamente estável. Segundo a Proposição 2, conforme se adiciona trabalhadores a esta firma (supostamente com θ_i inferiores a θ_{imax}), então existe um n^{max} tal que, para todo $n_j \leq n^{max}$, o equilíbrio de Nash é estável; porém, para todo $n_j > n^{max}$, esse equilíbriopassa a ser instável.

Admita então que a firma tenha um número de trabalhadores n_j em que o equilíbrio de Nash é estável, mas tal quen_{j+1}apresente um equilíbrioinstável. Então, se ela está inicialmente com n_j trabalhadores, a adição de mais um trabalhador fará com que o esforço de cada um deles possivelmente não seja o do equilíbrio de Nash $e^{*(n_j+1)}$, conforme exposto anteriormente. Porém, sendo $e^{*(n_j+1)}$ um equilíbrio instável, o fato de os trabalhadores estarem exercendo um esforço fora do equilíbrio acentua o problema de *free-rider*, fazendo com que cada trabalhador, ao invés de exercer um esforço convergente ao equilíbrio de Nash $e^{*(n_j+1)}$, na verdade realiza um esforço cada vez menor, em consequência dos incentivos providos pelo problema de assimetria de informação. Com isso, caso nenhum trabalhador saia dessa firma, seu produtoserá cada vez menor, período a período. Este fenômeno é um segundo fator que gerará a dinâmica de trabalhadores entre as firmas no modelo computacional que será introduzido adiante.

Proposição 2: *Considere uma firma com um número de trabalhadores n_j. Então, o equilíbrio de Nash referente aos esforços exercidos pelos trabalhadores dessa firma será estável se $n_j \leq n^{max}$, em que $(\partial n^{max} / \partial \theta_{imax}) > 0$. O equilíbrio será instável caso $n_j > n^{max}$.*

A partir dos problemas dos agentes e das firmas discutidos nesta seção, constrói-se a seguir o modelo computacional.

3. Modelo computacional

3.1 Configuração inicial do modelo

Esta seção descreve a implementação computacional do modelo, de acordo com a formulação apresentada na seção anterior. Considere$n$ indivíduos. No período inicial, t_0, os agentes são instanciados, e suas preferências definidas, $\theta_i \sim U(0,1)$. Na sequência, cada agente inicia sua própria firma. Portanto, são criadas $n$firmas, cada uma com valores definidos de a eb, e β, sendo $a \sim U(0, 1/2)$, $b \sim U(3/4\,, 5/4)$ e $\beta = 2$. Ainda em t_0, a rede de contatos entre os agentes é formada, sorteando, para cada agente, entre 3 e 5 outros agentes. A rede e os parâmetros permanecem fixos ao longo da simulação do modelo.

3.2 Dinâmica

Antes do início da produção de cada período, um percentual dos agentes (neste caso, 4%) verifica se a configuração atual é a mais satisfatória, do ponto de vista da sua utilidade. Essa verificação é feita a partir da comparação da utilidade na firma atual, em relação à criação de uma nova firma individual; e também considerando a hipótese de se juntar-se às firmas de cada um dos agentes constantes da sua rede, de acordo com o dado em (1). Um agente que tenha três outros agentes na sua rede de contatos, por exemplo, faz a comparação de cinco firmas: a corrente, a individual que seria criada,e cada uma das firmas nas quais seus contatos trabalham.

Dentre as opções disponíveis, o agente faz a sua escolha de acordo com a maior utilidade alcançada.Note que – dada a dinâmica própria do modelo – embora a rede de contatos permaneça a mesma, o teste feito pelos agentes a cada período é variável, já que seus contatos podem ter se mudado para outras firmas.

Uma vez que cada agente do percentual que está verificando as condições do mercado tomou sua decisão e fez a devida mudança ou abertura de firma, quando for o caso, a produção é executada e o produto distribuído entre os membros da firma. E assim, sucessivamente, com um grupo de agentes verificando sua situação a cada rodada, até o número de períodos total definido pelo modelador.[5]

Note que em cada uma das firmas ele empregará um esforço distinto, conforme seu tamanho, seu problema de *free-rider* e os possíveis ganhos de escala (conforme a função de produção da firma em (2)). Além disso, como o indivíduo observa apenas as firmas de seus vizinhos, sua informação é limitada.

Com isso, o modelo computacional apresenta duas fontes de heterogeneidade: os indivíduos e as firmas. No que diz respeito aos indivíduos, cada um deles possui uma distribuição de preferências $\theta_i \sim U(0,1)$(lembrando que, por (1), quanto maior for o valor de θ_i do indivíduo, maior o peso que ele dá ao consumo, em detrimento do lazer, em sua utilidade).

A segunda fonte de heterogeneidade são as firmas. Resgatando a função de produção em (2), $Y(E) = aE + bE^{\beta}$, cada uma delas possui parâmetros aleatórios, fazendo com que os potenciais ganhos de escala de cada uma delas sejam distintos entre si, assim como a produtividade do esforço de seus trabalhadores.

[5] O pseudocódigo está disponível em Axtell (2013). O modelo utilizado neste trabalho foi simulado em Python 3.4 e está disponível em **https://www.openabm.org/model/4948/version/3/view**

4. Resultados computacionais e empíricos

Os resultados do modelo buscam retratar o conjunto da economia – seus indicadores agregados –, mais do que resultados específicos para determinada firma ou agente.

Neste texto, realizamos a simulação tendo como referência o número de empregados de Belo Horizonte e municípios vizinhos denominados de *core*[6]pelos planejadores da RMBH, para o ano de 2010, de acordo com a Relação Anual de Informações Sociais (RAIS) do Ministério do Trabalho e Previdência Social (MTPS), ou seja, um total de 1.815.631 trabalhadores. Dada a limitação computacional, o modelo foi simulado utilizando-se 5% desse total, ou seja, 90.781 trabalhadores.[7]

Apresentamos, portanto, os resultados da simulação e os comparamos aos resultados empíricos da Região Metropolitana de Belo Horizonte (RMBH) e aos obtidos por Axtell para os Estados Unidos. A Figura 1ilustra a dinâmica do número total de firmas. Percebe-se um número total de firmas oscilando por volta de dois mil, após a passagem de 200 períodos de ajuste (16 anos e oito meses) e partindo do número inicial de firmas igual ao total de agentes, qual seja, 90.781 firmas individuais. Ao mesmo tempo, a Figura 1 permite observar os fluxos de entrada e saída de firmas e sua magnitude.As Figuras 2 e 3 sintetizam – em maior escala – os fluxos de novas firmas e firmas fechadas. Nota-se que, a cada período, nascem em torno de 20 a 60 firmas, e são fechadas em torno de 30 a 60 firmas, porém, com maior volatilidaderelativamente ao total de firmas abertas.

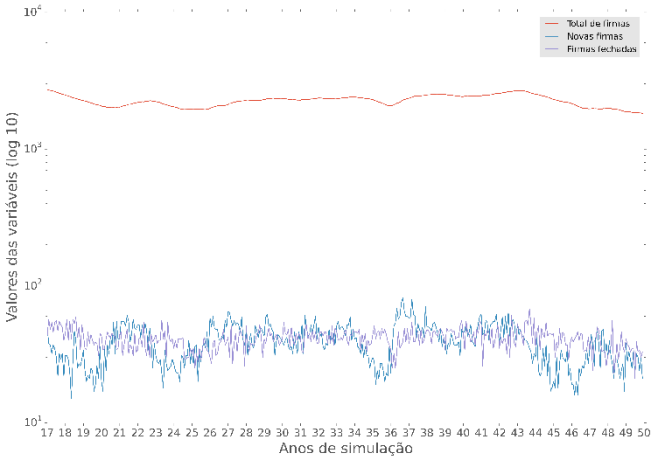

Figura 1– Número total de firmas, no estado estacionário

[6] Belo Horizonte, Betim, Confins, Contagem, Lagoa Santa, Nova Lima, Pedro Leopoldo, Ribeirão das Neves, Sabará, Santa Luzia e Vespasiano.

[7] Axtell (2013) ressalva que o tamanho da maior firma é dependente de forma sublinear em relação ao total de agentes utilizados.

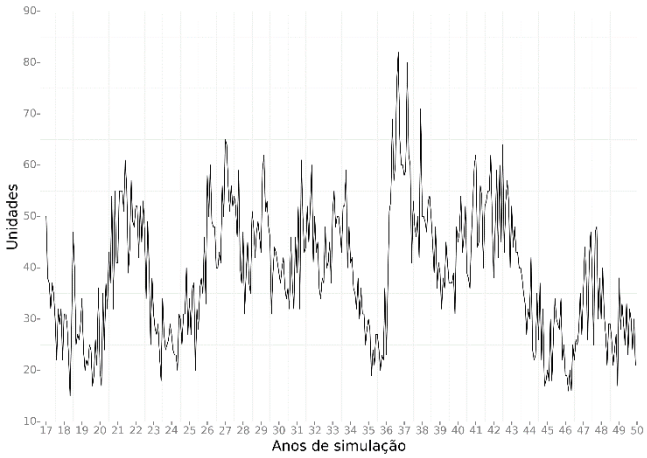

Figura 2 – Firmas criadas a cada período, no estado estacionário

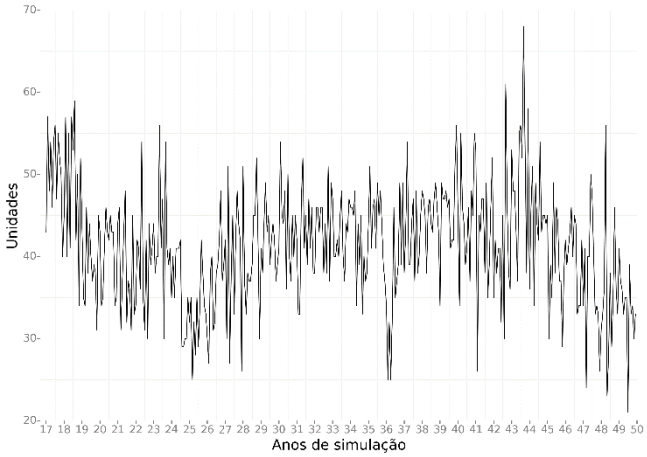

Figura 3 – Firmas extintas a cada período, no estado estacionário

A Figura 4ilustra a idade média das firmas no modelo. Os fluxos de nascimento e morte de firmas exibidos nas figuras anteriores acabam por gerar uma idade média para as firmas relativamente estável, entre60e 80 meses. Por sua vez, a Figura 5mostra que essa dinâmica gera firmas com sua média de tamanho mais persistente, mas ainda assim oscilando entre 30 e 50 funcionários.

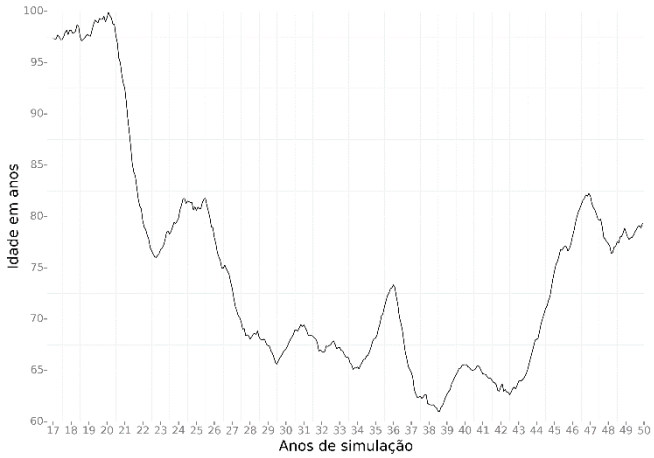

Figura 4 – Idade média das firmas, em meses, no estado estacionário

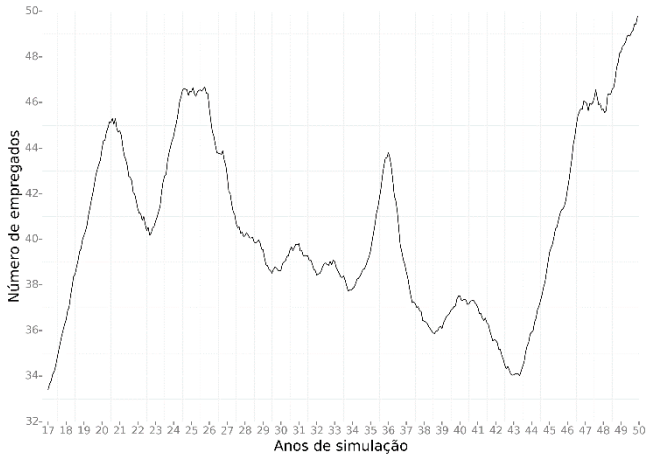

Figura 5 – Tamanho médio das firmas, dado pelo número de funcionários, no estado estacionário

As Figuras 6e 7utilizam a função de probabilidade para sintetizar as informações a respeito do tamanho das firmas no estado estacionário do modelo e nos dados reais da RMBH em 2013.[8] Nota-se uma função estritamente decrescente nos dois casos, com uma cauda convexa.[9]Esse comportamento também é observado nos resultados apresentados em Axtell (2013) para o caso do mercado americano. Relativamente às firmas geradas pelo modelo, a região metropolitana de Belo Horizonte conta com uma distribuição mais dispersa, com um número significativo de firmas maiores do que as maiores firmas presentes no estado estacionário do modelo.[10]

[8] Por uma questão de escala das figuras, o eixo horizontal apresenta o tamanho da firma, medido pelo logaritmo do número de empregados da firma, e oeixo vertical apresenta o logaritmoda probabilidade de ocorrência de firmas com o respectivo tamanho. Optou-se por apresentar as duas figuras na mesma escala, para facilitar a observação da diferença entre elas.

[9] Sem logaritmos, essa função assumiu uma alta convexidade, a ponto de tomar um formato em L.

[10] Foram utilizados os dados de emprego formal em 2013 na RAIS, excluídos os estabelecimentos cuja natureza jurídica correspondesse à administração pública e a organizações internacionais e outras instituições extraterritoriais. Tais empresas possuem uma dinâmica própria de crescimento, criação e extinção, independente dos mecanismos de mercado pretendidos no modelo teórico utilizado neste artigo.

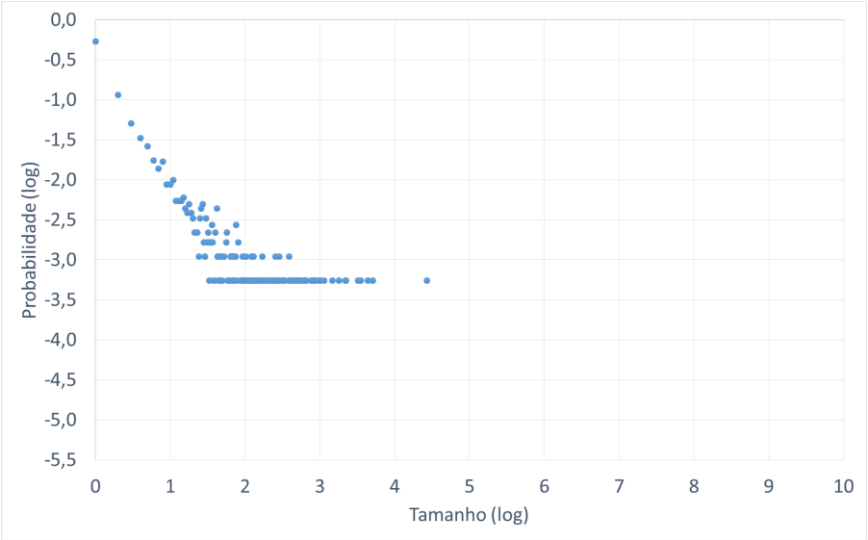

Figura 6 – Distribuição do tamanho das firmas, no modelo simulado

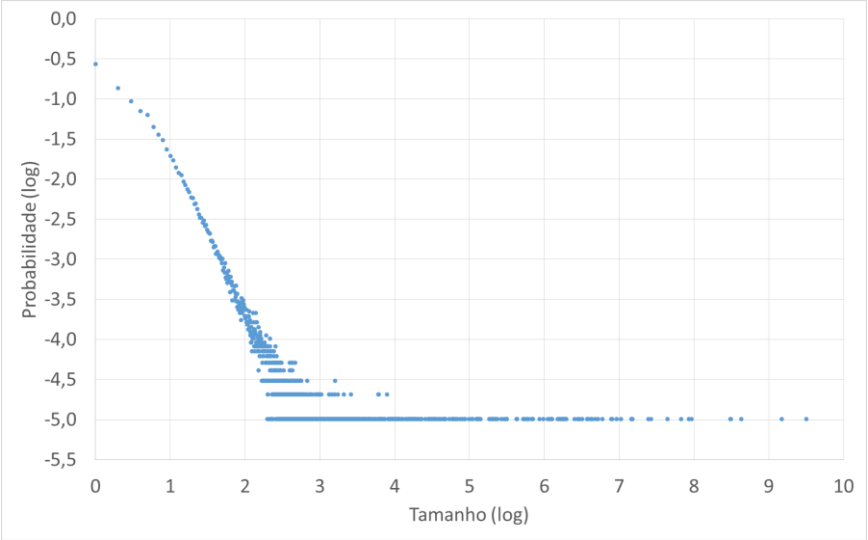

Figura 7 – Distribuição do tamanho das firmas, na RMBH em 2013

A Figura 8 ilustra a probabilidade de ocorrência, conforme a idade e o tamanho das firmas. Nota-se uma grande concentração de probabilidade próximo à origem (que representa um empregado, e zero meses de idade), com observações se tornando mais rarefeitas à medida que se distanciam dos eixos.AFigura9ilustra o caso dos estabelecimentospresentes na RMBH em 2013, para o último mês simulado do modelo com redes irrestritas. Pode-se observarque o modelo tende a obter um número maior de firmas jovens e menores, comparativamente aos dados reais da RMBH.

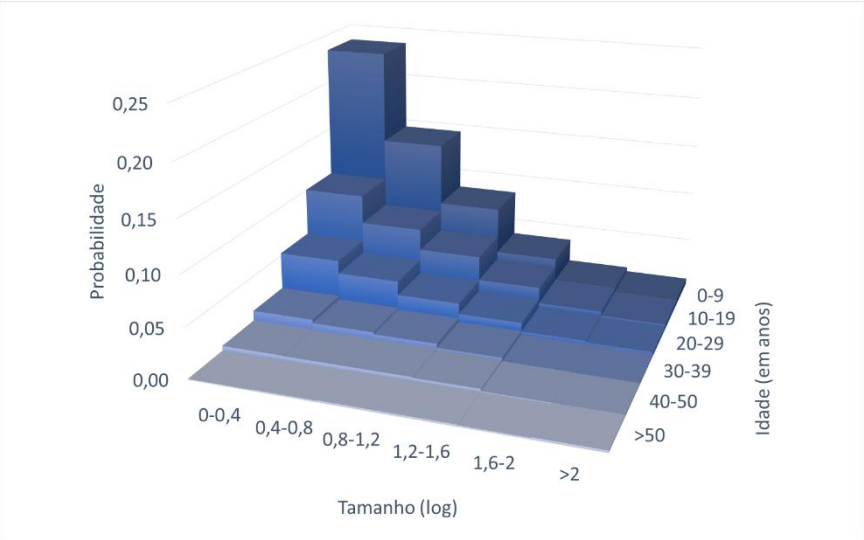

Figura 8 - Probabilidade por tamanho e idade (empresas não-governamentais), Belo Horizonte e vizinhos, RAIS/MTPS (2013)

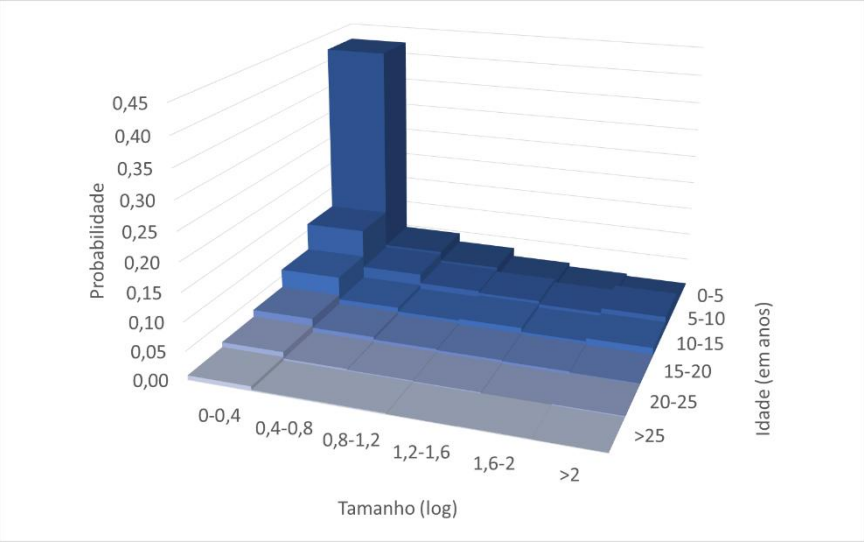

Figura 9 - Probabilidade por tamanho e idade, modelo simulado irrestrito

5. Restrições à rede por critérios de espacialidade

No intuito de explorar a hipótese de influência da rede de contatos e se observar os efeitos das interações especiais sobre a dinâmica das firmas, impusemos ao conjunto de dados simulados restrições à rede de contatos dos empregados, de acordo com sua localização. Nos resultados anteriores não haviam restrições e os empregados de todos os municípios mantinham rede de contatos aleatórias que poderiam incluir empregados de todos os outros municípios de forma indistinta, a chamada rede completa.

Nos resultados apresentados nesta seção, os trabalhadores mantêm contatos apenas dentre aqueles trabalhadores de seu próprio município. Essa restrição foi imposta de acordo com dados da Região Metropolitana de Belo Horizonte. Mais precisamente, a população da economia foi dividida de acordo com a distribuição ao longo de Belo Horizonte e seus municípios vizinhos, utilizando como referência o ano de 2010. Essa divisão foi realizada de acordo com o número de trabalhadores de cada município, com

base na Relação Anual de Informações Sociais (RAIS) do Ministério do Trabalho e Previdência Social (MTPS).

Assim, por exemplo, um trabalhador de Betim só poderia ter como contatos trabalhadores também de Betim (no modelo irrestrito, com rede completa, seus contatos poderiam ser de qualquer município outro município do modelo).

Este exercício inicial demonstra algumas diferenças entre os resultados simulados. Entretanto, não foram realizadas simulações suficientes para afirmar que as diferenças são estatisticamente significantes.[11]

A Tabela 1 resume as métricas que comparam a Figura 9 – do modelo irrestrito – com a Figura 10 que apresenta a configuração do modelo com agentes em rede restrita. Os resultados parecem indicar uma configuração mais dispersa, com maior número de firmas individuais, com média e mediana de idade menores se comparadas ao modelo irrestrito.

Tabela 1 – Comparação dos resultados simulados para o modelo irrestrito e o modelo com rede restrita

Modelo irrestrito					
		Média	**Mediana**	**Máximo**	**Mínimo**
Observações	1.825				
Idade em periodos		79,3	54	404	0
Número empregados		49,8	1	26.938	1
Modelo com rede restrita					
Observações	3.163				
Idade em periodos		66,9	45	599	0
Número empregados		28,7	1	12.626	1

Visualmente, as Figuras 10 e 11 são bastante similares em relação aos resultados da simulação com modelo irrestrito apresentado nas Figuras 6 e 9.

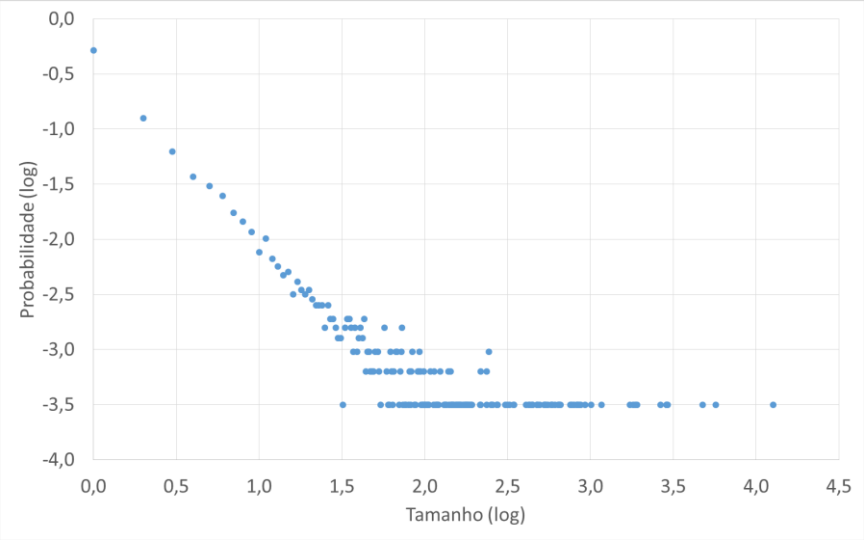

Figura 10 - Distribuição do tamanho das firmas, no modelo simulado com rede restrita

[11] Essa investigação será feita em trabalhos futuros. A configuração atual do modelo, em Python, exige cerca de 20 horas de computação para cada modelo, irrestrito e restrito, com apenas 5% da população. Neste estágio, uma simulação padrão de mil rodadas, o que permitiria cálculos de pseudo-significância, levaria cerca de 2 anos. Foram feitas duas rodadas para cada modelo, com resultados similares.

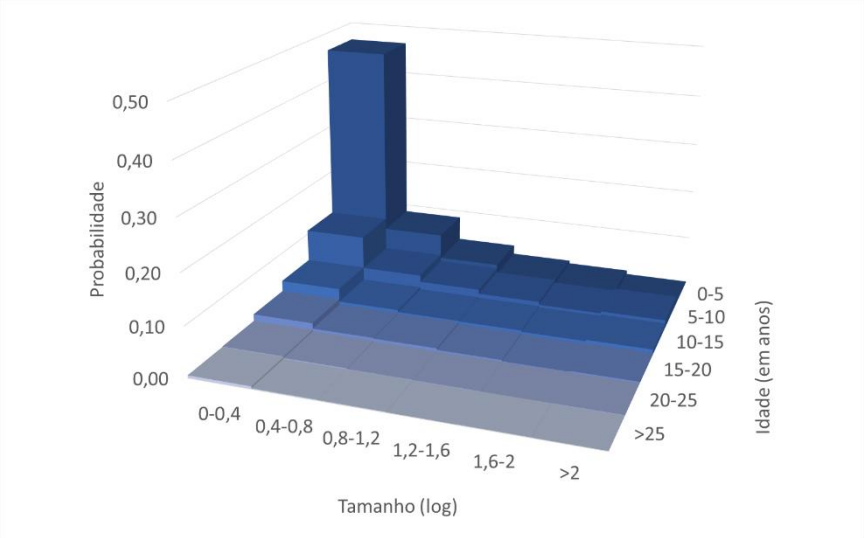

Figura 11 - Probabilidade por tamanho e idade, modelo simulado com rede restrita

Entretanto, as diferenças de dinâmica entre as firmas com rede restrita e rede ampla ficam mais evidenciadas na comparação dos dados de esforços e produção nos dois modelos. As Figuras 12e 13 ilustram o esforço médio exercido pelos trabalhadores, como resultado dos modelos irrestrito e restrito, respectivamente. No modelo irrestrito, nota-se que os ciclos econômicos de cada município ocorrem simultaneamente, com uma correlação positiva entre as atividades econômicas de cada um deles.

No modelo restrito, diferentemente, os ciclos econômicos de cada um deles ocorrem sem qualquer relação com os demais. Além disso, nota-se que o esforço médio ao longo dos municípios é superior no modelo restrito do que no irrestrito (para perceber isso, note que as escalas do eixo vertical de cada figura são diferentes entre si).

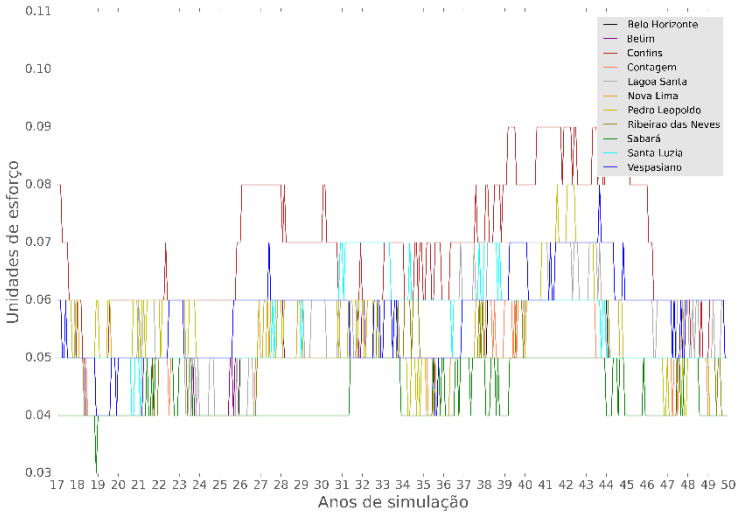

Figura 12 – Esforço médio dos agentes por município, no modelo irrestrito

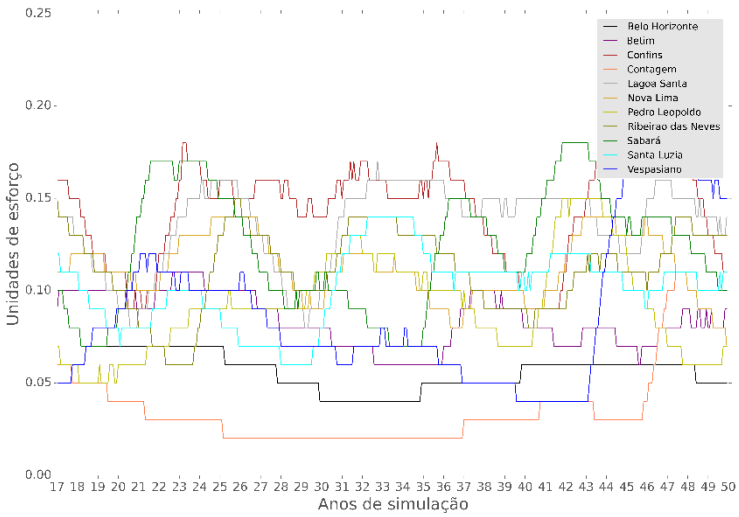

Figura 13 - Esforço médio dos agentes por município, no modelo com rede restrita ao município

Por sua vez, as Figuras14e 15 são análogos aos dois anteriores, mas reportando a utilidade média dos agentes (ao invés do esforço médio). Novamente, percebe-se uma coincidência entre os vários ciclos econômicos no modelo irrestrito, enquanto, no modelo restrito, os ciclos de cada município não guardam relação perceptível entre si.

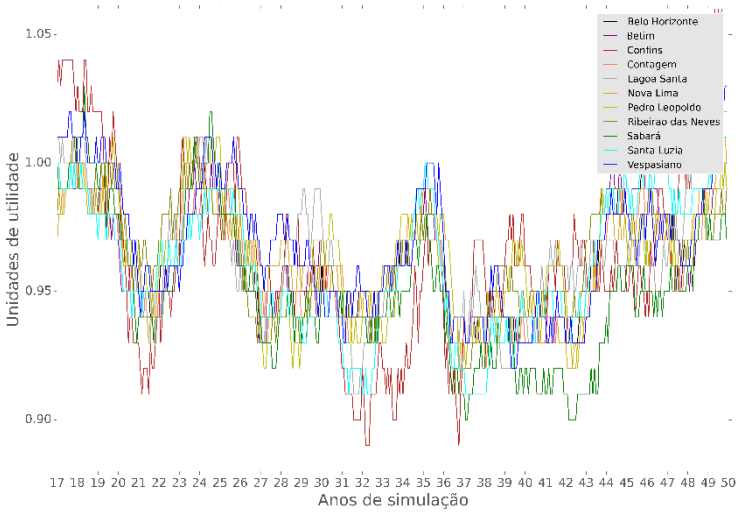

Figura 14 – Utilidade média dos agentes por município, no modelo irrestrito

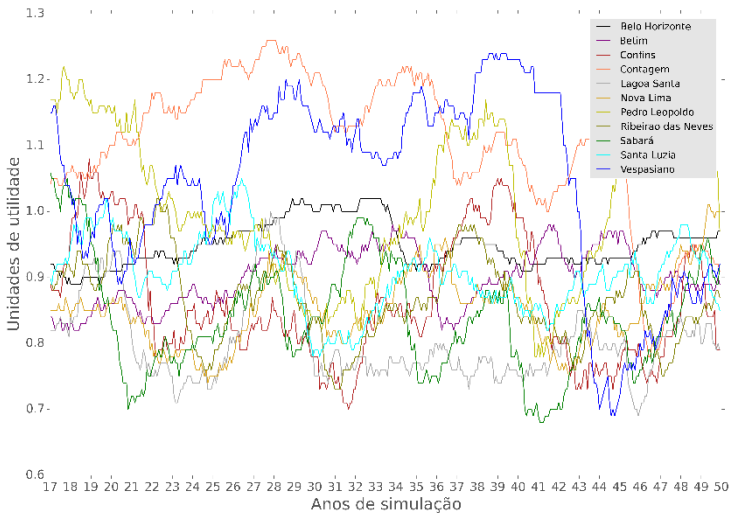

Figura 15 – Utilidade média dos agentes por município, no modelo com rede restrita ao município

6. Discussão e considerações finais

Este texto apresenta um modelo baseado em agentes, com trabalhadores associados a rede de contatos espacial, adaptado para o caso de Belo Horizonte, a partir do trabalho de Axtell (2013). O modelo é capaz de reproduzir a ordem de magnitude dos resultados empíricos observados. Todavia, mais relevante é a capacidade do modelo de iniciar processo de discussão acerca da dinâmica das firmas, ainda incipiente na literatura. De todo modo, o modelo replica os resultados alcançados por Axtell (2013) para o caso dos Estados Unidos em relação ao comportamento dos resultados, em especial: (a) a convergência para um número total de empresas empiricamente compatível, a partir do total de empregados; (b) a distribuição da frequência e do tamanho das firmas; (c) o comportamento oscilatório e cíclico de abertura e fechamento das firmas.

O modelo adaptado com a restrição da rede de contatos àqueles trabalhadores do mesmo município indicou que a escala de interconexão no mercado de trabalho parece ser relevante. De fato, o comportamento é mais caótico no modelo restrito e mais síncrono no modelo irrestrito, indicando a possibilidade de que municípios com rede de contatos menos denso poderia estar de forma intrinsecamente ainda mais sujeito às flutuações endógenas das firmas, a partir de decisões individuais e racionais dos agentes.

Todavia, este modelo é um exercício inicial que espera contribuir para uma melhor compreensão do processo de formação de firmas e sua dinamicidade, construído a partir das referências teóricas disponíveis. De acordo com Epstein (1999, p. 43): "*if you didn't grow it, you didn't explain its emergence*".[12]Ou seja, o verdadeiro entendimento da questão envolve a capacidade de replicaros mecanismos geradores do fenômeno. Mais do que causalidade, a compreensão do fenômeno é dada pela capacidade de mimetizar as relações cujas interações resultam em efeitos observáveis.

Além disso, este modelo propõeuma dinâmica endógena das firmas. Não há nele, portanto, necessidade de impor choques exógenos para que o comportamento agregado dos agentes seja naturalmente errático e cíclico, compondo, por exemplo, com

[12] E complementa, na notação lógica: $(\forall x)(\neg Gx \supset \neg Ex)$

a presença de períodos de supostas crises, ou fases de dinamismo acelerado, mesmo após o modelo se encontrar no seu estado estacionário.

Finalmente, ressalte-se que vários indicadores da robustez do modelo estão apresentados em Axtell (2013). A primeira crítica possível é que o resultado do modelo seria apenasa replicação de um modelo estocástico. Entretanto, a comparação com um modelo no qual os agentes escolhem de forma aleatória a qual empresa se juntar mostrou configuração muito diferente, levando apenas à constituição de firmas de pequeno porte. O ajuste dos parâmetros das funções de produção das firmas indicou que para retornos crescentes maiores, isto é, com $\beta > 2$, haveria o surgimento de firmas muito grandes, inconsistentes com a evidênciaempírica. Outras distribuições para os parâmetros que definem as características dos agentes também foram utilizadas, com baixa influência nos resultados. O tamanho da rede contatos dos agentes também não alterou significativamente os resultados. Quando os agentes alteram de forma mais moderada o esforço realizado, a despeito da entrada de novos trabalhadores na firma, há um aumento no número de firmasgrandes, com diminuição relativa da dinâmica dos trabalhadores. Por fim, outros modelos de distribuição da produção das firmas – que não de forma igualitária, por exemplo, retorno em produção equivalente ao esforço dos agentes – levou à quebra da replicação empírica do modelo. Isso porque – dados os retornos crescentes – faz mais sentido para os trabalhadores se unirem em uma única firma.[13]

Como tarefa futura, é intenção dos autores acoplar esta estrutura de formação de firmas endógenas a outros modelos baseados em agentes (FURTADO; EBERHARDT, 2015) que tenham amarras nas áreas de finanças públicas e federalismo, para uma análise do caso brasileiro.

7. Referências

1. ARTHUR, W. B. Complexity and the economy. **Science**, v. 284, p. 107–109, 1999.
2. AXTELL, R. **Endogenous firms and their dynamics**. Working paper. Recuperado março 23, 2016, de http://www.acefinmod.com/docs/esrc/axtell-firms.pdf, 2013.
3. CLAUSET, A.; MOORE, C.; NEWMAN, M. E. Hierarchical structure and the prediction of missing links in networks. **Nature**, v. 453, n. 7191, p. 98–101, 2008.
4. COASE, R. H.. The Nature of the Firm. **Economica**, v. 4, p. 386–405, 1937.
5. DAVID, N.; SICHMAN, J. S.; COELHO, H. The logic of the method of agent-based simulation in the social sciences: Empirical and intentional adequacy of computer programs. **Journal of Artificial Societies and Social Simulation**, v. 8, n. 4, 2005.
6. EPSTEIN, J. M. Agent-based computational models and generative social science. **Complexity**, v. 4, n. 5, p. 41–60, 1999.
7. EPSTEIN, J. M. **Generative Social Science: Studies in Agent-Based Computational Modeling**. Princeton University Press, 2011.
8. EPSTEIN, J. M.; AXTELL, R. **Growing artificial societies: social science from the bottom up**. Cambridge, MA: Brookings/MIT Press, 1996.
9. FURTADO, B. A.; EBERHARDT, I. D. R. A simple agent-based spatial model of the economy: tools for policy. **arXiv:1510.04967 [cs, q-fin]**. Recuperado fevereiro 19, 2016, de http://arxiv.org/abs/1510.04967, 2015.

[13] Outras considerações de robustez estão disponíveis no texto original de Axtell (2013).

10. FURTADO, B. A.; VAN DELDEN, H. Modelagem urbana e regional com autômatos celulares e agentes: panorama teórico, aplicações e política pública. **Textos para Discussão**, v. 1576, Ipea: Brasília, 2011.
11. GRANOVETTER, M. Economic Action and Social Structure: The Problem of Embeddedness. **The American Journal of Sociology**, v. 91, n. 3, p. 481–510, 1985.
12. HOLMSTROM, B. Moral hazard in teams. **The Bell Journal of Economics**, p. 324–340, 1982.
13. MANKIW, N. G. **Principles of Economics**. 6º ed. South-Western College Pub, 2011.
14. NARDIN, L. G.; SICHMAN, J. S. Trust-based coalition formation: A multiagent-based simulation. Proceedings of the 4th World Congress on Social Simulation. **Anais...** , 2012.
15. NEWMAN, M.; BARABÁSI, A.-L.; WATTS, D. J. **The Structure and Dynamics of Networks:**1 edition ed. Princeton: Princeton University Press, 2006.
16. PUTNAM, R. D. Capital social e desempenho institucional. **Comunidade e democracia: a experiência da Itália moderna**. p.173–194. Rio de Janeiro: Editora FGV, 1993.
17. SIMON, H. **Administrative behavior**, 3rd edn. London: Macmillan.